白鷗大学論集　第25巻　第2号

研究ノート

χ^2分布，t分布，F分布（2）

沖　津　　　直

THE χ^2, t and F Distributions

OKITSU Tadashi

以上　第25巻第2号　本号

Ⅱ　t分布

1．t分布の定義とt分布の性質

母平均μ、母分散σ^2より、大きさnの標本変量$X_1, X_2,\cdot\cdot\cdot, X_n$を取り出して標本平均$\bar{X}$という統計量をつくる。$\bar{X}$の標本分布は、母集団が正規分布のときはもちろんのこと、たとえ母集団は正規分布でなくとも、標本の大きさnが25以上であれば中心極限定理より、漸近的に正規分布に従うことがわかっている。$\bar{X}$の分布はほぼN（μ, $\frac{\sigma^2}{n}$）に従う。したがって、$\bar{X}$を標準化した次の変数は、以下に示すように、

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathrm{N}(0, 1) \qquad (1)$$

標準正規分布に従うことになる。この関係を実際に応用するときの困難は、一般に母集団の分散σ^2が不明であるという点である。母集団の性質、特にその母数を知りたいために標本を観察し、それを通じて母集団の平均値や分散を推定しようとしているのであるから、母分散σ^2がわからないのは当然のことである。このようなとき、標準化という操作をどのように考えればよいか。その場合、母分散σ^2の不偏推定量は

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \qquad (2)$$

となるので、その正の平方根である$\hat{\sigma}$を代用する。この不偏推定量を用いて（1）式に代入したつぎの式は、自由度$\phi = n-1$のt分布に従う。

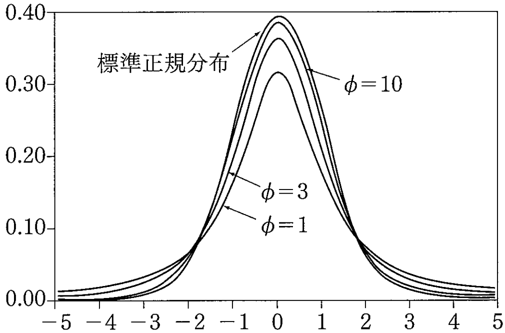
$$t=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}} \qquad (3)$$

この式で定められる確率変数tを、t分布と呼んでいる。このときt変数の確率密度関数は次の式で与えられることが証明されている。

$$f(t)=\frac{\Gamma(\frac{\phi+1}{2})}{\sqrt{\phi\pi}\,\Gamma(\frac{\phi}{2})}(1+\frac{t^2}{\phi})^{-\frac{1}{2}(\phi+1)} \qquad -\infty < t < \infty$$

また、t変数の平均E（t)、分散V（t）はそれぞれつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{E}(t)=0 \\ &\mathrm{V}(t)=\frac{\phi}{\phi-2} \qquad \phi \geq 3 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$



1図　自由度ϕ＝1，3，10のt分布のグラフと、標準正規分布のグラフ

（3）式で定められる分布を自由度$\phi = n-1$のt分布という。t分布の自由度は分母にくる$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$の自由度によって決まってくる。

χ^2分布の場合と同様に、t分布も母集団分布が正規分布であるという正規性の条件に対して、頑丈な分布である。この分布の形は、平均値0の対

称分布であり、標準正規分布と同じような対称分布となるのである。しかし、標準正規分布よりも若干散らばりが大きく、n が小さいほど分布の散らばりは大きい。t 分布の形は自由度 ϕ の大きさによって変化し、標本の大きさが大きくなるにつれて t 分布は１図のように正規分布の形に次第に近づいていく。自由度が１、３、10の場合について、それぞれを正規分布と比較したものを１図に示してある。大雑把ではあるが、同図からも標準正規分布との違いがどの程度かがわかる。この図からも、t 分布は自由度が大きくなれば標準正規分布に近づき $n>25$ ならば t 分布を標準正規分布で近似しても誤差は非常に小さいことがわかる。したがって、母分散が未知の場合でも、標本が大きいときには、実際に正規分布を近似的に使用できる。t 分布は基本的に母分散が未知でしかも小標本の場合に使われる。変数は t が α の上側確率に対応する t よりも大きい確率は、

$$P(t > t_\alpha) = \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t)dt$$

である。したがって、変数 t の絶対値が t_α を超える確率は、分布が０を中心に左右対称であるから、

$$P(|t| > t_\alpha) = 2 \times \int_{t_\alpha}^{\infty} f(t)dt$$

で計算される。しかし、この確率は標本の大きさ n の値によって変わるから、t 分布表は自由度 $\phi = n-1$ の種々の値と、実用上よく使われる確率 α の若干の値との組み合わせに対する t_α の値の表として、t 分布表がつくられている。

付表の t 分布表より、いくつかの t の値を見つけてみよう。この値は自由度 ϕ と上側確率 α によって決まる。たとえば、$\phi=20$ と $\alpha=0.01$、$\phi=25$ と $\alpha=0.05$ の t の値を求めると、

$t_{0.01}=2.528$、$t_{0.05}=1.708$

となる。また、自由度 $\phi<30$ のとき、つぎの補間法で求める。ϕ の逆数について比例配分する。たとえば、$\phi=38$ に対する t の値は、つぎのようになる。

$$t_{0.05} = t_{0.05}^{\phi=30} + \left\{t_{0.05}^{\phi=40} - t_{0.05}^{\phi=40}\right\} \frac{(\frac{1}{30}-\frac{1}{38})}{(\frac{1}{30}-\frac{1}{40})}$$

$$t_{0.05} = 1.697 + (1.684 - 1.697) \times \frac{96}{114} = 1.686$$

一般に、t値の補間法公式は、$\phi_1 < \phi < \phi_2$ のとき、つぎのとおりである。

$$t_\alpha^\phi = t_\alpha^{\phi_1} + \left\{t_\alpha^{\phi_2} - t_\alpha^{\phi_1}\right\} (\frac{1}{\phi_1} - \frac{1}{\phi}) / (\frac{1}{\phi_1} - \frac{1}{\phi_2})$$

次に、t分布を使う推測統計である推定および検定について見ていくことにしよう。t分布で１変数で使用する推測統計については、参考文献４のp217からp229を参照してください。ここでは、２つの平均の差の検定についてのみ見ていくことにしよう。

２．２つの平均の差の検定

２つの平均の差に関する検定は、（１）母分散が既知の場合、（２）母分散が未知で等しい場合、（３）母分散が未知で等しいかどうかがわからない場合について考えていくことにする。１組の標本でのt分布については、参考文献４のp221～p226を、さらに以下に説明する平均の差の検定の（１）と（２）はp229～p237を参照されたい。

（１）母分散が既知の場合

２つの正規母集団があり、一方はN（μ_1, σ_1^2）他方はN（μ_2, σ_2^2）にしたがっているとしよう。いま、N（μ_1, σ_1^2）の母集団からのn個の標本変量をX_{11}, X_{12}, ・・・, X_{1n_1}とし、その平均を$\overline{X}_1$とすると、

$$\overline{X}_1 = \frac{X_{11} + X_{12} + ... + X_{1n_1}}{n_1}$$

の標本分布はN（μ_1, $\sigma^2_1/_{n_1}$）に従う。同様に、N（μ_2, σ_2^2）の母集団からのｎ個の標本変量を、X_{21}, X_{22}, ・・・, X_{2n_2}とし、その平均を$\overline{X}_2$とす

ると、

$$\overline{X}_2 = \frac{X_{21} + X_{22} + \dots\dots + X_{2n_2}}{n_2}$$

の標本分布はN（μ_2, σ_2^2/n_2）に従う。

このとき、$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$という平均の差の統計量はN（$\mu_1 - \mu_2$, $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$）に従うことが証明されている。したがって、$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$を標準化したつぎの変数

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad (5)$$

は、N（0，1）に従うことになる。

例題１　A地区の16人の学生の知能指数IQは平均72、B地区の学生14人の学生のIQは平均77であった。両地区のIQ分布はそれぞれ正規分布に従っており、過去の経験からA地区の標準偏差が10、B地区の標準偏差が８であることがわかっているものとする。両地区の学生のIQには差があるか、有意水準５％とする。

A地区とB地区の学生の平均IQに差があるかどうかであるから、仮説をつぎのように設定する。

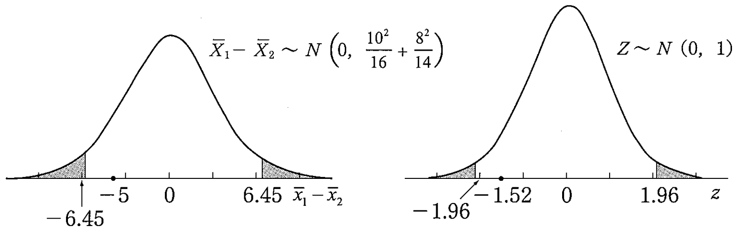
H_0：$\mu_1 = \mu_2$

H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$

したがって、$\mu_1 - \mu_2 = 0$であり、$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$はつぎの２図のような正規分布に従う。よって、

$$\sigma_{\overline{X} - \overline{X}_{22}} = \sqrt{\frac{10^2}{16} + \frac{8^2}{14}} = \sqrt{10.821} = 3.29$$

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} = \frac{72 - 77}{3.29} = -1.52$$



(a)　$\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ の標本分布　　　　(b)　標準正規分布

2図

すなわち、Z＝－1.52＞Z＝－1.96であるから、この場合、有意水準α＝5％であるから、このときの棄却域は0から1.96σ＝1.96×3.29＝6.45以上離れた横軸上の両側のすべての範囲からなり、2組の標本から、$\overline{X}_1 - \overline{X}_2$＝72－77＝－5が得られたが、この値－5はこの検定の採択域にはいっているから、帰無仮説を採択することになる。

この例題のように、母集団が正規分布にしたがっていれば、標本の大きさが小さくても分散がわかっていれば正規分布に従うけれども、標本の大きさが小さく母分散が未知であれば、差の分布は正規分布ではなくt分布に従うことになる。

（2）母分散が未知で等しい場合

2つの正規母集団があり、これらの母平均値はそれぞれ未知である。しかし、母分散については、互いに等しいことがわかっているが、その値については未知である。このとき、2つの母集団の母平均値は等しいか否かについて検定しよう。

まず、一方の母集団分布はN（μ_1, σ_1^2）、他方の母集団分布はN（μ_2, σ_2^2）としよう。未知だが、共通の分散をσ^2とすると、ここでは$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$。両側検定のときの仮説は次のように設定される。

H_0：$\mu_1 = \mu_2$

H_1：$\mu_1 \neq \mu_2$

σ_1^2、σ_2^2が既知あるいは未知であってもn_1、n_2が十分大きければ、２つの平均値の差の検定で使った標準正規分布を使った方式で検定することができるが、ここではσ_1^2、σ_2^2が未知で標本の大きさがn_1、n_2はともに小さい小標本の場合である。X_1、X_2の標本分散をそれぞれ

$$S_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2}{n_1}\qquad S_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2}{n_1}$$

とおくとき、

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n_1+n_2-2}(n_1S_1^2+n_2S_2^2) \tag{6}$$

となる。この$\hat{\sigma}^2$は結合分散と呼ばれている。$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$であるから、（５）式は（６）式の$\hat{\sigma}$を代入して、結合分散を考慮すれば、$\overline{X}_1-\overline{X}_2$を標準化したつぎの変数は、$\sigma_1^2$、$\sigma_2^2$、未知の場合、

$$t=\frac{X_1-X_2-(\mu_1-\mu_2)}{\hat{\sigma}\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-2}(n_1S_1^2+n_2S_2^2)(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}} \tag{7}$$

であることが証明されている。したがって、$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$であるから、（６）式は$\sigma_1^2$、$\sigma_2^2$のかわりに$\hat{\sigma}^2$を代入するとこうなる。ここで、$H_0$：$\mu_1=\mu_2$の場合、（７）式は

$$t=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\hat{\sigma}\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}=\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{n_1S_1^2+n_2S_2^2}}\sqrt{\frac{(n_1+n_2-2)n_1n_2}{n_1+n_2}} \tag{8}$$

となる。（７）式も（８）式も分散が未知であるから自由度n_1+n_2-2のt分布に従う。また、σ_1とσ_2が未知だが等しい場合、（７）式を変形して信頼係数（$1-\alpha$）×100％に対する差$\mu_1-\mu_2$の信頼区間は、

$$(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-t_{\alpha/2}\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<(\mu_1-\mu_2)<(\overline{X}_1-\overline{X}_2)+t_{\alpha/2}\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \tag{9}$$

となる。

例題２　ある企業ではメーカーの異なる電球A、Bについて、寿命検査を行って次のような結果を得たとしよう。A、B両電球の間に差があるかどうかを、有意水準５％で検定してみよう。ただし、母分散は未知だが等しく、それぞれの標本は独立な正規母集団から抽出されたものと仮定する。

電球A	$n_1=25$	$\bar{X}_1=1200$	$s_1=40$
電球B	$n_2=16$	$\bar{X}_2=1150$	$s_2=36$

AとBに差があるかどうかであるから、両側検定として仮説を次のように設定する。

H_0：$\mu_1=\mu_2$

H_1：$\mu_1\neq\mu_2$

ここで、２つの標本による結合分散式より$\hat{\sigma}$を次のように求める。

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{n_1s_1^2+n_2s_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{25(40)^2+16(36)^2}{25+16-2}}=\sqrt{\frac{60736}{39}}=39.5$$

次いで、（７）式のt統計量の値を求めると、次のようになる。

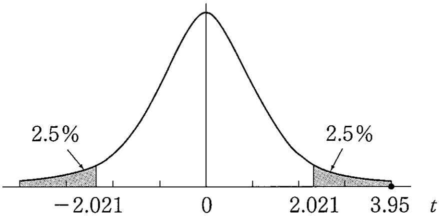
$$t=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\hat{\sigma}\sqrt{(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}=\frac{1200-1150}{39.5\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{16}}}=3.95$$

これに対して、自由度$n_1+n_2-2=39$、有意水準５％に対応する棄却域と採択域の右側の境界値は、自由度を40とみなしてt分布表より、

$t_{0.025}=2.021$

を得る。両側検定であるから、

$t=3.95\quad>\quad t_{0.025}=2.021$



３図　自由度39のt分布

となって、観察されたtの値3.95は、３図のように棄却域にはいっている。ゆえに、帰無仮説H_0を棄却する。したがって、ＡとＢ電球の間には、有意差があると考えてよい。すなわち、Ａの電球の平均寿命がＢの電球のそれよりも優れているといえる。

それでは、その差はどれぐらいであるか。差の推定をするために、まず、平均差$\mu_1-\mu_2$は$\overline{X}_1-\overline{X}_2$で点推定される。$\overline{X}_1-\overline{X}_2=1200-1150=50$であるから、Ａ社の電球の寿命は、Ｂ社のそれよりも平均50時間ほどいちおう長いと考えてよい。続いて、差$\mu_1-\mu_2$の95%に対する信頼区間を求めてみよう。（９）式にそれぞれの数値を代入して、

$$50-2.021\times3.95\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{16}}<\mu_1-\mu_2<50+2.021\times3.95\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{16}}$$

$$24.44<\quad\mu_1-\mu_2\quad<\quad75.56$$

したがって、Ａ社とＢ社の電球の寿命の差は、信頼係数95％に対して24.44時間から75.56時間の間であると考えてよい。

例題３　Ａ、Ｂ２大学のある学部の学生に同じテストを行って、次の結果を得た。

$$\overline{X}_1=70\qquad s_1=12\qquad \overline{X}_2=65\qquad s_2=15$$

添字１はＡを、添字２はＢを示す。また、Ａ、Ｂの学生数はそれぞれ10名と15名で、n_1、n_2ともに小さい小標本である。この２つの無作為標本から判断して、Ａ大学の学生のほうが優秀であるといえるか。有意水準５％とする。ただし、成績の分布が正規分布に従うものと仮定する。

例題２と同じように等分散$\sigma_1^2=\sigma_2^2$として、次のように検定を行う。この場合少なくとも$\mu_1<\mu_2$ではありえないとして、次のような右片側検定を行ってみよう。

H_0：$\mu_1=\mu_2$

H_1：$\mu_1>\mu_2$

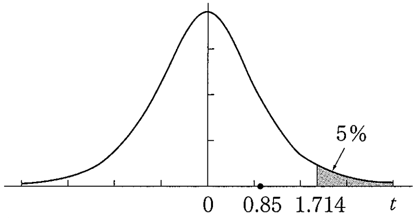
まず、結合分散の計算を経ないで直接（６）式にそれぞれの数値を代入

してtの値を求めると次のようになる。

$$t=\frac{(70-65)}{\sqrt{10\times12^2+15\times15^2}}\sqrt{\frac{(10+15-2)\times10\times15}{10+15}}=0.85$$

これに対し、自由度$n_1+n_2-2=23$、有意水準5％に対する正の境界点$t_{0.05}=1.714$を得る。tの値と正の境界点の大小を比較すると、

$$t=0.85 \quad < \quad t_{0.05}=1.714$$



4図　自由度23のt分布

となって、観察されたtの値0.85は、4図のように、採択域にはいっていることになる。ゆえに、帰無仮説H_0を採択する。したがって、A大学の学生のほうがB大学の学生よりも優秀であるとはいえない。別言すれば、この2標本は、有意水準5％から見て学力の異なる母集団からのものとみなすことができない。

さらに、3つ以上の平均値の差の検定については、分散分析で扱われる。

（3） 母分散が未知で等しいかどうかわからない場合

（1）～（2）までは等分散$\sigma_1^2=\sigma_2^2$を前提でしたけれども、等分散を前提できなくても、$\mu_1=\mu_2$であるかどうかを検定したいときがある。しかし、等分散を前提できないときでも、

$$t=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{\phi_1}+\dfrac{s_2^2}{\phi_2}}}=\frac{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{n_1}+\dfrac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2}}} \qquad (10)$$

は、近似的に自由度

$$\phi=\frac{\left(\frac{s_1^2}{\phi_1}+\frac{s_2^2}{\phi_2}\right)^2}{\frac{s_1^4}{\phi_1^3}+\frac{s_2^4}{\phi_2^3}}$$ （分数のときは一番近い整数値をとる）

の t 分布に従うことが解っている。たとえば、例題2で $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ かどうかわからない場合の検定を行う。

A：$n_1=25$　$\overline{X}_1=1200$、$s_1=40$、　$\phi_1=24$

B：$n_2=16$　$\overline{X}_2=1150$、$s_2=36$、　$\phi_2=15$

この場合、等分散であるかどうかをまず、検定する。もし、これが棄却されなければ、H_0：$\mu_1=\mu_2$ の検定に進む。この等分散の検定は、後述する F 分布で詳しく扱われる。この場合、検定統計量 F は F 分布の（3）式より、次のように計算される。

$$F=\frac{\frac{25\times(40)^2}{24}}{\frac{16\times(36)^2}{15}}=\frac{1667}{1382.4}=1.21$$

$F>1$ であるから、F 分布表より、両側検定の右側の境界値 $F_{\phi_2}^{\phi_1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2.70$ を得る。

この境界点と F の値の大小を比較すると、

$$F=1.21 \quad < \quad F_{\phi_2}^{\phi_1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2.70$$

となる。ゆえに、H_0：$\mu_1=\mu_2$ という帰無仮設 H_0 を採択する。

さて、うえの等分散の検定の理論をうけて、$\mu_1=\mu_2$ の検定を行う。こんどは $\sigma_1^2=\sigma^2$（未知）と前提して、つぎの仮設を検定する。

$$\begin{cases} H_0: \mu_1=\mu_2 \\ H_1: \mu_1\neq\mu_2 \end{cases}$$

（10）式の検定統計量 t の値を求めると、

$$t=\frac{1200-1150}{\sqrt{\frac{(40)^2}{25-1}+\frac{(36)^2}{16-1}}}=4.04$$

また、自由度は

$$\phi = \frac{\left(\dfrac{(40)^2}{24} + \dfrac{(36)^2}{15}\right)^2}{\left(\dfrac{(40)^4}{(24)^3} + \dfrac{(36)^4}{(15)^3}\right)} = 34.3$$

であるから、t分布表より、自由度34.3の右側境界点 $t_{0.025} = 2.03$を得る。すなわち、tの絶対値と境界値の大小を比較すると、

$$|t| = 4.04 \quad > \quad t_{0.025} = 2.03$$

となる。ゆえに、帰無仮設H_0を棄却する。結局、例題1と同じ結論となる。

さらに、$\mu_1 - \mu_2$の信頼係数95%に対する差$\mu_1 - \mu_2$の信頼区間は、（9）式の tが、

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{\phi_1} + \dfrac{s_2^2}{\phi_2}}}$$

となるから、

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{\phi_1} + \frac{s_2^2}{\phi_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{\phi_1} + \frac{s_2^2}{\phi_2}} \qquad (11)$$

である。この式に該当する例題2の数値を代入し計算すると、信頼係数95%に対する（$\mu_1 - \mu_2$）の信頼区間を具体的に求めてみよう。

$$50 - 2.03 \times 12.373 < \quad \mu_1 - \mu_2 \quad < 50 + 2.03 \times 12.373$$

$$24.9 < \quad \mu_1 - \mu_2 \quad < 75.1$$

となって、例題2の信頼区間とほぼ同じものが得られる。

Ⅲ　*F*分布

1．*F*分布の定義とその性質

互いに独立な2つの変数χ_1^2、χ_2^2がそれぞれ自由度ϕ_1、ϕ_2のカイ二乗分布をするとき、次の式で定義される確率変数

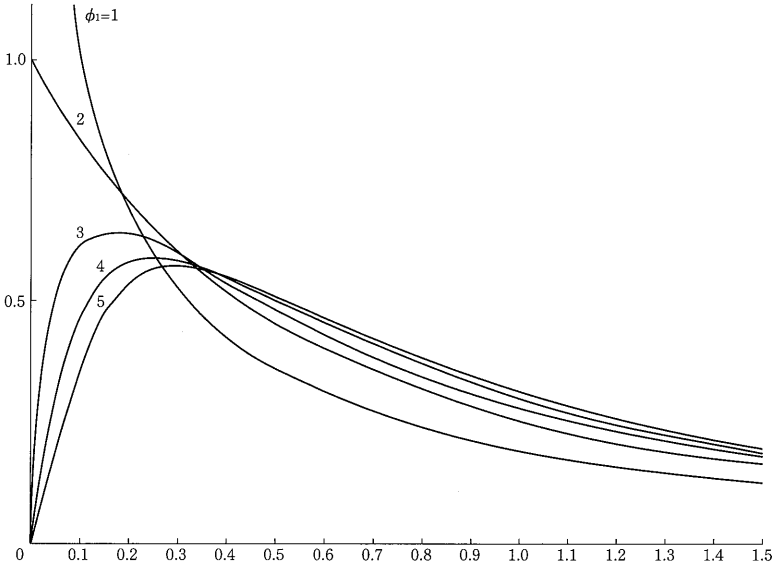
$$F=\frac{\chi_1^2/\phi_1}{\chi_2^2/\phi_2} \qquad (1)$$

は次の式で定められる F 分布をすることが証明されている。

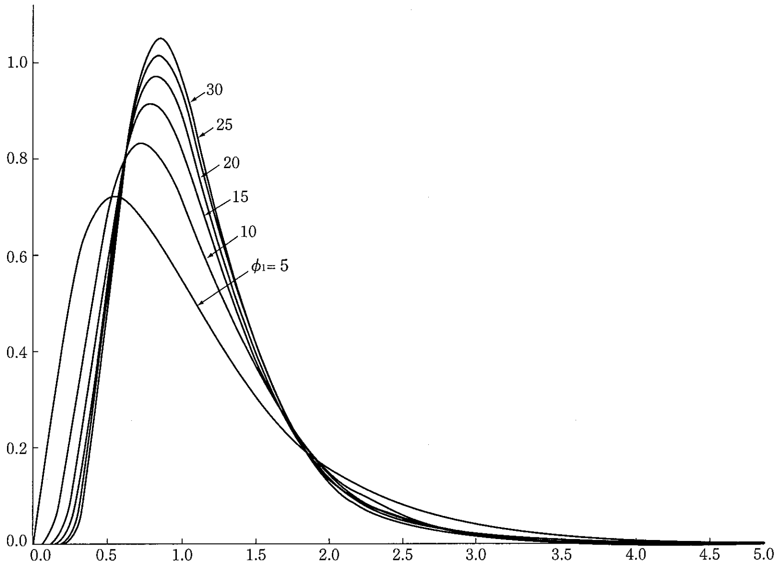
$$\left.\begin{aligned} f(F)&=\frac{\Gamma(\frac{\phi_1+\phi_2}{2})}{\Gamma(\frac{\phi_1}{2})\Gamma(\frac{\phi_2}{2})}(\frac{\phi_1}{\phi_2})^{\frac{\phi_1}{2}}F^{\frac{\phi_1-1}{2}}(1+\frac{\phi_1}{\phi_2}F)^{-\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}\ldots(F\geq 0)\\ f(F)&=0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (F<0)\end{aligned}\right\}$$

分布の平均Ｅ（F）、分散Ｖ（F）は、それぞれつぎのとおりである。

$$\left.\begin{aligned} E(F)&=\frac{\phi_2}{\phi_2-2}\\ V(F)&=\frac{2\phi_2^2(\phi_1+\phi_2-2)}{\phi_1(\phi_2-2)(\phi_2-4)}\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



５図　***F*** 分布（１）（ϕ_1＝１，２，３，４，５；ϕ_2＝２）



6図　*F*分布（2）（ϕ_1＝5，10，15，20，25，30；ϕ_2＝20）

（2）式で定められる分布を、自由度ϕ_1、ϕ_2のF分布という。（1）式のχ_1^2、χ_2^2はともに0よりも大きいから、$F > 0$であり、その分布の形は2つの自由度によって非対称な分布の形が決まる。5図はϕ_2＝2に対するϕ_1が1，2，3，4，5の場合のF分布であり、6図はϕ_2＝20に対するϕ_1＝5，10，15，20，25，30の6つのF分布を示している。この2つのF分布の図は、2つの自由度がともに5以下の小さい場合の図と自由度ϕ_2を20に固定して自由度ϕ_1の大きさを変えている図である。

自由度ϕ_1、ϕ_2はこの分布の母数である。自由度によってF分布の形がきまるのである。自由度の任意の値の組（ϕ_1，ϕ_2）に対して、確率変数Fが任意の大きさの確率Pに対応するFの値$F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)$よりも大となる確率が、次の式で計算される。

$$P(F > F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)) = \int_{F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)}^{\infty} f(F)dF$$

$F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)$を自由度（ϕ_1，ϕ_2）のF分布の上側100P点と呼ぶ。上側100P

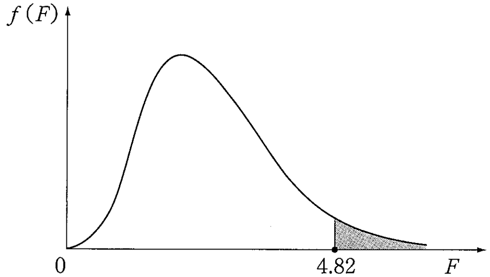
点が一定のときでも、$F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)$ の値は自由度 ϕ_1, ϕ_2 によって変わるのである。F 分布の数値表は通常よく使用されるいくつかの確率P（最も多く使われるPは５％と１％と2.5％）の値の対する $F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)$ の値を自由度 ϕ_1, ϕ_2 の種々の組み合わせに対して示している。いま、２つの正規母集団があり、その分散をそれぞれ σ_1^2, σ_2^2 とする。各母集団から大きさ n_1, n_2 の標本をとり、それぞれの標本分散を S_1^2, S_2^2 とする。そうすると、$n_1S_1^2/\sigma_1^2$, $n_2S_2^2/\sigma_2^2$ はそれぞれ自由度 $\phi_1 = n_1 - 1$、$\phi_2 = n_2 - 1$ の χ^2分布をするから、この２つの比率を F とおくと、

$$F = \frac{n_1S_1^2}{(n_1-1)\sigma_1^2} \bigg/ \frac{n_2S_2^2}{(n_2-1)\sigma_2^2} \tag{3}$$

となり、この F 値は自由度 $n_1 - 1$、$n_2 - 1$ の F 分布に従う。いま、この２つの標本が同じ母集団からとられたとすると、母分散は同一であるから $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ であり、したがって上の比率は

$$F = \frac{n_1S_1^2 / (n_1-1)}{n_2S_2^2 / (n_2-1)} = \frac{\sum(x-\bar{x})^2 / (n_1-1)}{\sum(y-\bar{y})^2 / (n_2-1)} \tag{4}$$

となり、母分散を含まない統計量となる。この統計量を分散比という。分散比は自由度 $n_1 - 1$、$n_2 - 1$ の F 分布をし、分散の有意差検定に応用される。



７図　自由度８，５の *F* 分布

F分布は、たとえば自由度（8，5）で上側確率Pが5％にあたるFの値はF_5^8（0.05）＝4.82であることが7図に示されている。F分布の数値表（出所：参考文献1 p1082から1087を参照）をみると、自由度8、5のF分布の右境界値は

P（F＞4.82｜ϕ_1＝8、ϕ_2＝5）＝0.05

である。F分布表は

$$F=\frac{\chi_1^2/\phi_1}{\chi_2^2/\phi_2}>1$$

の場合について計算され掲載されている。F分布表をみると、自由度（8，5）で上側確率Pが5％にあたるFの値はF_5^8（0.05）＝4.82であることが7図に示されているので、自由度8，5のF分布の右境界値は、

P（F＞4.82｜ϕ_1＝8、ϕ_2＝5）＝0.05

である。したがって、これに対応してFが0から4.82までの確率は95％であるということである。すなわち、

P（0＜F＜4.82｜ϕ_1＝8、ϕ_2＝5）＝0.95

F分布表はすべて右境界値の値しか掲載されていない。であるから、左境界値は次のようにして見つける。左境界値をF_Lで示すと、

P（F＜F_L）＝0.05

となるF_Lを見つければよいことがわかる。しかし、F分布表からF_Lの値を見つけることはできない。F_Lの値は次のように逆数を使って求めることが出来る。

P（F＜F_L）＝P（1／F_L＜1／F）＝P（1／F＞1／F_L）＝0.05

上の式をよくみると、自由度が逆になっているのである。したがって、F分布表から、自由度5、8の5％右境界値は、3.69であるから、上の式は

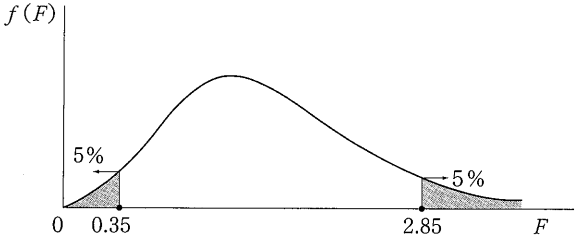
P（1／F＞1／F_L＝3.69）＝0.05

と書き直せる。したがって、

1／F_L＝3.69　　　　F_L＝1／3.69＝0.271

であるから、自由度８、５の５％の左境界値はF_L＝0.271であることが判明する。以上の説明を要約すると、$F>1$である場合、Fが確率$1-P$となるFの値を求めるためには$F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)$の自由度を入れ替えてその逆数を計算すればよい。すなわち、

$$F_{\phi_1}^{\phi_2}(1-P)=\frac{1}{F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)} \qquad (5)$$



８図　自由度12，8の*F*分布

の関係にある（参考文献３p163～165参照)。（５）式の$F_{\phi_2}^{\phi_1}$（$1-P$）はF分布表の左境界値であり、この境界値よりも小さい左の領域が下側確率といわれている。付表３のF分布表より、F_8^{12}（P）の値から下側確率F（$1-P$）を求めてみよう。

F_8^{12}（0.05）＝3.28

である。これに対応する左境界値は次のようにして求めることができる。まず、自由度を逆にして、F_{12}^{8}(0.05）の値を求める。F分布表より、F_{12}^{8}(0.05)＝2.85である。したがって、（５）式より

F_8^{12}（0.05）＝１／F_{12}^{8}(0.05）＝１／2.85＝0.351

となる。F_8^{12}（0.95）＝0.351の値は、８図の左側に示された位置になる。以上の説明からわかるとおり、F表の値はすべて１よりも大きいのである。Fの最小値は、２つの自由度がともに無限大の時、１に等しい。F値を計算して、F表を用いる場合、分子により大きい分散をおかなければならないので、もし、Fが１よりも小さい場合、分子と分母を入れ替えておかなければならないことに留意されたい。なお、グラフの形は、２つの自

由度の大きさによって変ってくる。

F分布は1920年の初期に、Z分布としてR.A.フィッシャーによって発案された。後に、スネデカーが、フィシャーとイェイツがつくったZ表を現在あるようなF表につくりかえた。F分布は主に等分散の検定、３つ以上の平均値の差の検定に応用される。後者については、分散分析で扱う。

２．等分散の検定

（１）平均値未知の場合

２組の母集団（μ_1, σ_1^2)、(μ_2, σ_2^2）より、それぞれ抽出された２組の標本について、それらの属する母集団のσ_1^2、σ_2^2分散のあいだに差異があるかどうかの検定について考えてみよう。まず、帰無仮説を次のように設定する。

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

つぎに、母集団N（μ_1, σ_1^2）より抽出されるn個の標本変量を

$$X_{11},\ X_{12},\ \cdots\cdots,\ X_{1n_1}$$

とし、母集団N（μ_2, σ_2^2）より抽出されるn_2個の標本変量を

$$X_{21},\ X_{22},\ \cdots\cdots,\ X_{2n_2}$$

とする。そして、それぞれの平均を$\overline{X}_1$、$\overline{X}_2$、母分散σ_1^2およびσ_2^2の不偏推定量をそれぞれ$\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$とすると、

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\left\{(X_{11} - \overline{X}_1)^2 + (X_{12} - \overline{X})^2 + \dots\dots\dots + (X_{1n_1} - \overline{X})^2\right\}$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\left\{(X_{21} - \overline{X})^2 + (X_{22} - \overline{X})^2 + \dots\dots\dots + (X_{2n_2} - \overline{X})^2\right\}$$

となる。ここで、

$$\chi_1^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left\{(X_{11} - \overline{X}_1)^2 + (X_{12} - \overline{X})^2 + \dots\dots\dots + (X_{1n_1} - \overline{X})^2\right\} \qquad (6)$$

を考えると、これは自由度$\phi_1 = n_1 - 1$のχ^2分布に従う。同様に、

$$\chi_2^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left\{(X_{21} - \overline{X}_2)^2 + (X_{22} - \overline{X})^2 + \dots\dots\dots + (X_{2n_2} - \overline{X})^2\right\} \qquad (7)$$

を考えると、これは自由度$\phi_2 = n_2 - 1$のχ^2分布に従う。そこで、前述したように2つのχ^2分布に従う変量の比をつくれば、F分布に従うことになる。つまり、

$$F = \frac{\chi_1^2 / \phi_1}{\chi_2^2 / \phi_2} = \frac{n_1 S_1^2 / (n_1 - 1)\sigma_1^2}{n_2 S_2^2 / (n_2 - 1)\sigma_2^2} \qquad (8)$$

は自由度（$\phi_1 = n_1 - 1$、$\phi_2 = n_2 - 1$）のF分布に従う。（8）式の後半は、つぎのようにして導かれている。S_1^2およびS_2^2は、それぞれ

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \overline{X}_1)^2}{n_1} \qquad S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \overline{X}_2)^2}{n_2}$$

であるから、それぞれ

$$\sum_{i=1}^{n_1} (X_{1i} - \overline{X}_1)^2 = n_1 S_1^2 \qquad \sum_{i=1}^{n_2} (X_{2i} - \overline{X}_2)^2 = n_2 S_2^2$$

である。これらをχ_1^2、χ_2^2のかわりに代入すれば、（8）式の右側の式がみちびかれる。ここで、（8）式において、帰無仮設H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$のもとでは

$$\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1$$

となるから、（8）式は未知のσ_1^2、σ_2^2の分散が消去され、

$$F = \frac{n_1 S_1^2 / n_1 - 1}{n_2 S_2^2 / n_2 - 1} \qquad (9)$$

となる。等分散の検定は、両側検定の場合、有意水準αに対して、自由度（$\phi_1 = n_1 - 1$、$\phi_2 = n_2 - 1$）のF分布表より、

$$P(F > F_{\phi_2}^{\phi_1}(\frac{\alpha}{2})) = \frac{\alpha}{2} \qquad P(F > F_{\phi_2}^{\phi_1}(\frac{\alpha}{2})) = \frac{\alpha}{2}$$

を満足する2つの境界点$F_{\phi_2}^{\phi_1}(P)$、$F_{\phi_2}^{\phi_1}$（$1 - P$）を見つけて、計算されるFの値と比較すればよい。すなわち、

$F > F_{\phi_2}^{\phi_1}$（$\alpha/2$）または$F < F_{\phi_2}^{\phi_1}$（$1-\alpha/2$）　　ならば、H_0を棄却する

$F_{\phi_1}^{\phi_2}$（$1-\alpha/2$）＜　F　＜　$F_{\phi_2}^{\phi_1}$（$\alpha/2$）　　ならば、H_0を採択する

と判定すればよい。もし、$F>1$ならば、$F > F_{\phi_2}^{\phi_1}$（$\alpha/2$）になるかどうかを調べればよい。もし、$F<1$ならば、$F < F_{\phi_1}^{\phi_2}$になるかどうかを調べればよい。

例題1　仕入先Aの製品より、大きさ10の標本を抽出して含有鉄分を調べたところ、平均値$\overline{X}_1$と標本標準偏差S_1はそれぞれ

$$\overline{X}_1 = 10\,\mathrm{g} \qquad S_1 = 3.2\,\mathrm{g}$$

であった。一方、仕入先Bの製品より、大きさ17の標本を抽出して含有鉄分を調べたところ、標本平均値$\overline{X}_2$と標本標準偏差S_2はそれぞれ

$$\overline{X}_2 = 20\mathrm{g} \qquad S_2 = 3.0\,\mathrm{g}$$

であった。この2つの仕入先の製品の含有鉄分の目方に散らばりの差があるといえるか。有意水準を5％とする。ただし、AおよびBの製品の含有鉄分の目方は、正規分布に従っているものとする。この場合、2つの集団の分散は等しいと仮定し、仮説を次のように設定する。

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

つぎに、検定統計量Fの値を求める。（9）式より、

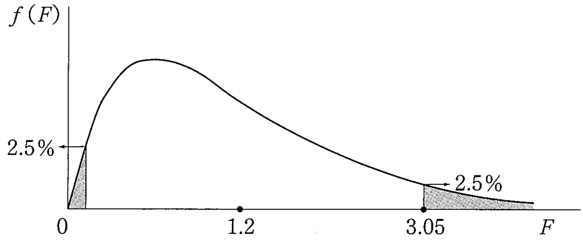
$$F = \frac{n_1 S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2 S_2^2 / (n_2 - 1)} = \frac{10 \times (3.2)^2 / (10-1)}{17 \times (3.0)^2 / (17-1)} = 1.2$$

この検定統計量Fは、自由度（$\phi_1 = 9$，$\phi_2 = 16$）のF分布に従う。この場合、$F>1$であるから、有意水準$\alpha = 0.05$に対応する自由度（9，16）のF分布表より、右側の境界点

F_{16}^{9}（0.025）＝3.05

を得る。$F=1.2$であるから、

$F=1.2$　＜　F_{16}^{9}（0.025）＝3.05



9図　自由度9，16のF分布

となって検定統計量Fの値1.2は、９図に示すように、採択域にはいっていることになる。ゆえに、帰無仮設H_0を採択する。したがって、A製品とB製品の含有鉄分の目方の散らばりに有意な差があるとは認めがたい。

例題２　A、B２社の社員の中から、無作為にそれぞれ８人と７人を選んで前年度の所得を調べたところ、つぎの結果を得た。２社の社員の所得の分布は、それぞれ正規分布に従っているものとし、有意水準５％で検定してみよう。（単位万円）

A：280　320　400　420　470　540　630　700

B：350　400　450　480　530　580　640

A社の所得の分散をσ_1^2、B社の所得の分散をσ_2^2とすると、仮説は次のようになる。

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

つぎに標本から次の値を求める。

$$\overline{X}_1 = \frac{280+320+400+420+470+540+630+700}{8} = 470$$

$$n_1 S_1^2 = (280-470)^2 + (320-470)^2 + \ldots\ldots + (700-470)^2 = 149400$$

$$\overline{X}_2 = \frac{350+400+450+480+530+580+640}{7} = 490$$

$$n_2 S_2^2 = (350-490)^2 + (400-490)^2 + \ldots\ldots + (640-490)^2 = 61600$$

（7）式に、該当する数値を代入して検定統計量Fの値を求めると、

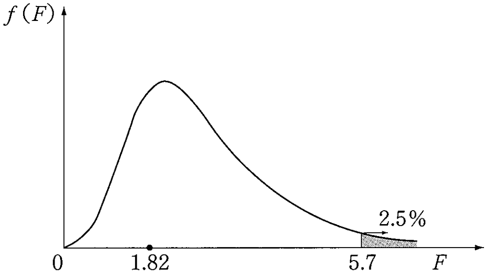
$$F = \frac{149400 / 8-1}{61600 / 7-1} = 1.82$$

$F > 1$であるから、有意水準5％に対応する自由度（7，6）のF分布表より、右側の境界点

F_6^7（0.025）＝5.7

を得る。Fの値と右境界点の大小を比較すると、

F=1.82　＜　F_6^7（0.025）＝5.7



10図　自由度7，6の***F***分布

となって、Fの値1.82は10図に示すように採択域にはいっている。ゆえに、帰無仮設H_0を採択する。したがって、両社の社員の所得の散らばりに差があるとは認めがたい。

この例題2のデータは、正規分布であるという仮定の話であり、現実の所得分布が正規分布であるということではないことに留意されたい。

例題３ A、B２台の旋盤で作られる製品の直径を測定して、つぎの結果を得た。これらの旋盤でできる製品の直径に散らばりの差があるかどうか。A、Bの旋盤でつくられる製品の直径の分布は、それぞれ正規分布に従っているものとし、有意水準５％で検定してみよう。

A：8.51、8.51、8.48、8.47、8.50、8.50

B：5.02、5.05、4.99、5.06、4.94

まず、仮説として、

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

をたてる。各標本より、$\overline{X}_1$ $\overline{X}_2$ $n_1S_1^2$、$n_2S_2^2$ をそれぞれ計算する。

$$\overline{X}_1 = \frac{8.51+8.51+8.48+8.47+8.50+8.50}{6} = 8.50$$

$$\overline{X}_2 = \frac{5.02+5.05+4.99+5.06+4.94}{5} = 5.01$$

$$n_1S_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i} - \overline{X})^2, \quad n_2S_2^2 = \sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i} - \overline{X}_2)^2$$

より、

$$6\,S_1^2 = (8.51-8.50)^2 + (8.51-8.50)^2 + (8.48-8.50)^2 + (8.47-8.50)^2 + (8.50-8.50)^2 + (8.50-8.50)^2 = 0.0015$$

$$5\,S_2^2 = (5.02-5.01)^2 + (5.05-5.01)^2 + (5.06-5.01)^2 + (4.99-5.01)^2 + (4.94-5.01)^2 = 0.0095$$

以上の計算より、（９）式に代入してF検定統計量の値を求めると、

$$F = \frac{n_1S_1^2 / (n_1 - 1)}{n_2S_2^2 / (n_2 - 1)} = \frac{0.0015 / (6-1)}{0.0095 / (5-1)} = 0.13$$

となる。F_4^5（0.05）=9.36であるが、この場合、$F < 1$ であるから、左側

の境界点を見つけたい。そのために、まず、分子と分母を入れ替えた自由度（4， 5）の上側確率0.025となる右側の境界点

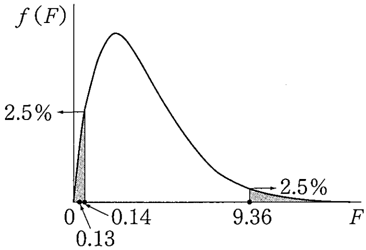
F_5^4（0.025）＝7.39

を見つける。それから、（5）式の左側の境界点

F_4^5（0.025）＝1／F_5^4（0.025）＝1/7.39＝0.14

を求める。この場合11図に示すように

F＝0.13＜F_4^5（0.025）＝0.14



11図　自由度5，4の*F*分布

となって、Fの値は棄却域にはいっている。ゆえに、帰無仮説H_0を棄却する。したがって、A、B２台の旋盤で作られる製品の直径には、分散の差があると考えられる。

この例題３のように、F＜１となると、左側の境界点を求めるのが少し面倒であると思う人はF＞１になるように分子と分母を逆にして検定を行うとよい。この例題の場合、

$$F=\frac{0.0095/(5-1)}{0.0015/(6-1)}=7.92$$

となる。このFは自由度（4， 5）のF分布に従う。一方、有意水準５％の両側検定であるから、右側の境界点F＝7.39と観察されるFの値7.92の大小を比較すると、

F＝7.92　＞　F_5^4（0.025）＝7.39

となる。ゆえに、帰無仮説 H_0を棄却する。このようにして同じ結論が得られる。

（２）平均値既知の場合

もし、２組の正規母集団において、平均値 μ_1、μ_2既知の場合、$\overline{X}_1$、$\overline{X}_2$を使う必要はない。この場合、帰無仮説 H_0：$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ だから、

$$\chi_1^2 = \frac{1}{\sigma_1^2}\left\{(X_{11}-\mu)^2 + (X_{12}-\mu)^2 + \ldots\ldots + (X_{1n_1}-\mu)^2\right\}$$

$$\chi_2^2 = \frac{1}{\sigma_2^2}\left\{(X_{21}-\mu_2)^2 + (X_{22}-\mu_2)^2 + \ldots\ldots + (X_{2n_2}-\mu_2)^2\right\}$$

それぞれ自由度 n_1 と n_2 の χ^2分布に従うから、

$$F = \frac{\chi_1^2 / n_1}{\chi_2^2 / n_2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\mu_1)^2 \Big/ n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\mu_2)^2 \Big/ n_2} \qquad (10)$$

なる検定統計量を考える。これは、自由度（$\phi_1 = n_1$、$\phi_2 = n_2$）の F分布に従う。(10) 式をみればわかるように、検定の方式は、平均値未知の場合と同様であるが、自由度がそれぞれ標本の大きさと同じになっていることである。なお、本来であれば、平均値既知の場合から平均値未知の場合へと進めるところであるが、実際の問題では未知の場合が多いと思うので、あえてここでは未知からはじめた。

例題４　例題１において、仕入先Ａ、Ｂの製品の含有鉄分の問題において、２つの正規母集団の母平均が、次に示すように既知のとき有意水準５％として、検定してみよう。前例題と同様に仮説はつぎのようになる。

$$\begin{cases} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{cases}$$

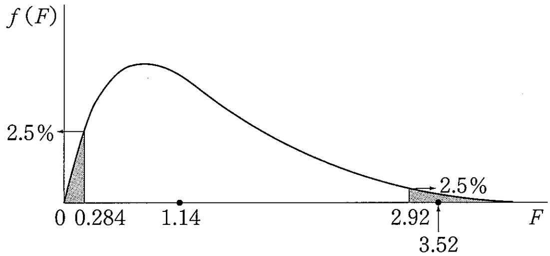
$n_1 = 10$、$n_2 = 17$、$S_1^2 = 3.2$、$S_2^2 = 3.0$

これらの各数値を使って偏差2乗の合計を求めると、

$$\sum_{i=1}^{n_1}(\mathrm{X}_i-\mu)^2=10\times(3.2) \qquad \sum_{i=1}^{n_2}(\mathrm{X}_i-\mu)^2=17\times(3.0)$$

となるから、観察されるFの値は、

$$F=\frac{10\times(3.2)^2/10}{17\times(3.0)^2/17}=1.14$$



12図　自由度10，17のF分布

となる。これは、自由度（10，17）のF分布に従う。この場合、$F>1$であるから、上側確率0.025となる右側の境界点

F_{17}^{10}（0.025）＝2.92

を得る。そして、左側の境界点は、F_{10}^{17}（0.025）＝3.52であるから、F_{10}^{17}（0.025）＝1／3.52＝0.284である。明らかにF＝1.14よりもはるか左にある。したがって、観察されるFの値と右側の境界点の大小を比較すると、

F_{10}^{17}（0.025）＝0.284＜ F=1.14　＜　F_{19}^{10}（0.025）＝2.92

となって、12図からわかるように、観察されるFの値は、採択域にはいっている。ゆえに、例題1と同様に帰無仮説H_0を採択することになり、同じ結果となることがわかる。

これまでの説明では、例題を用いて問題の本質をふまえながら推測統計の使い方、利用の仕方などを説明してきました。これまでのデータを、たとえば2つの機械でつくられているビン詰めのコーヒーの正味の重さと

か、ある学校におけるある科目の男女別の学生の成績とか、２つの種類の肥料を施した同じ面積の圃場における収穫高とか、２つの地域におけるガソリンの消費量について差があるかどうか等にも応用することが出来るのである。

以上のように、χ^2分布、t分布、F分布の重要な標本分布について、２つの稿にわたって、定義とその性質、現実においてそれらがどのように利用されているのかを説明してきました。現実の種々の分析において、それらの分布表の見方と使い方を理解しておくことが不可欠である。特に、t分布に関しては、標本の大きさが25よりも小さくてかつ分散が未知の場合に使用する。そして、標本が極端に小さいほど、t分布の両すその面積が広く大きくなり、そのぶん推測統計の威力が減殺されることになる。F分布に関する注意点は、F値はいつも１よりも大きくなるように分母と分子の位置にもってくるように、それぞれの標本を分析の初めからはっきり区別しておくことである。そして、もうひとつは、F値の左境界値をF分布表から正確に見つけられるようにしておくことである。間違いやすいし、わかりにくいので注意しておこう。F値のすべての値は、$F>1$の右境界値を示しているので、左境界値については、自由度を逆にして表から右境界値を見つけて、その右境界値の逆数を左境界値にしなければならない。

χ^2分布、t分布、F分布は基本的に正規母集団を前提にしている。しかし、現実の利用にあたっては、母集団分布が正規分布に従うという理論設定を厳密に解釈したのでは利用する範囲がかなり狭くなってしまうのであまり賢明ではない。この理論設定は、純粋に数学的なものであるので、実際問題への応用に際しては、母集団のデータのヒストグラムが、大体において正規分布のような形をしているという程度に考えておいて差し支えない。幸い、ここにあげた３つの分布はいずれも頑健な分布であり、母集団分布が厳密に正規分布でなくてもこれまでの内容が充分に通用するのである。私達の周りには正規分布をする現象あるいはそれに近い現象のものが

非常に多く、これらの適用範囲はすこぶる広く飛躍的に拡大しているのである。

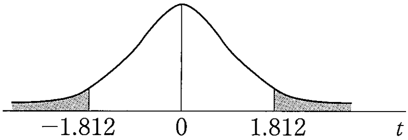
参考文献

1．	Statistics	taro Yamane	3ed.	Harper&row	1973
2．	Elementary statistics	P.G.Hoel	4ed.	John.Wiley Sons,Inc.	1975
3．	日常のなかの統計学	鷲尾泰俊著	岩波書店		1984
4．	統計学入門	沖津　直著	八千代出版		1998

（本学経営学部教授）

付 表

t 分 布 表

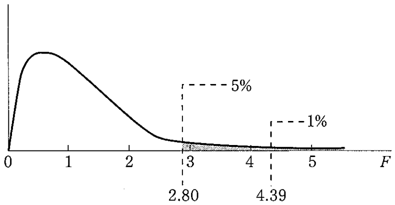


例
自由度が $\phi=10$ のとき：
$P\ (t>1.812)=0.05$
$P\ (t<-1.812)=0.05$

ϕ \ α	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598
3	.765	.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941
4	.741	.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859
6	.718	.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405
8	.706	.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.687	.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767
24	.685	.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.397	3.745
25	.684	.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

付　表

F　分　布　表



例
自由度が$\phi_1 = 9$、$\phi_2 = 12$のとき：$P\ (F > 2.80) = 0.05$
$P\ (F > 4.39) = 0.01$

5％（上の数値）と１％（下の数値）

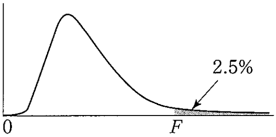
ϕ_2	ϕ_1 自由度																								ϕ_2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	
1	161 4,052	200 4,999	216 5,403	225 5,625	230 5,764	234 5,859	237 5,928	239 5,981	241 6,022	242 6,056	243 6,082	244 6,106	245 6,142	246 6,169	248 6,208	249 6,234	250 6,258	251 6,286	252 6,302	253 6,323	253 6,334	254 6,352	254 6,361	254 6,366	1
2	18.51 98.49	19.00 99.00	19.16 99.17	19.25 99.25	19.30 99.30	19.33 99.33	19.36 99.34	19.37 99.36	19.38 99.38	19.39 99.40	19.40 99.41	19.41 99.42	19.42 99.43	19.43 99.44	19.44 99.45	19.45 99.46	19.46 99.47	19.47 99.48	19.47 99.48	19.48 99.49	19.49 99.49	19.49 99.49	19.50 99.50	19.50 99.50	2
3	10.13 34.12	9.55 30.82	9.28 29.46	9.12 28.71	9.01 28.24	8.94 27.91	8.88 27.67	8.84 27.49	8.81 27.34	8.78 27.23	8.76 27.13	8.74 27.05	8.71 26.92	8.69 26.83	8.66 26.69	8.64 26.60	8.62 26.50	8.60 26.41	8.58 26.35	8.57 26.27	8.56 26.23	8.54 26.18	8.54 26.14	8.53 26.12	3
4	7.71 21.20	6.94 18.00	6.59 16.69	6.39 15.98	6.26 15.52	6.16 15.21	6.09 14.98	6.04 14.80	6.00 14.66	5.96 14.54	5.93 14.45	5.91 14.37	5.87 14.24	5.84 14.15	5.80 14.02	5.77 13.93	5.74 13.83	5.71 13.74	5.70 13.69	5.68 13.61	5.66 13.57	5.65 13.52	5.64 13.48	5.63 13.46	4
5	6.61 16.26	5.79 13.27	5.41 12.06	5.19 11.39	5.05 10.97	4.95 10.67	4.88 10.45	4.82 10.27	4.78 10.15	4.74 10.05	4.70 9.96	4.68 9.89	4.64 9.77	4.60 9.68	4.56 9.55	4.53 9.47	4.50 9.38	4.46 9.29	4.44 9.24	4.42 9.17	4.40 9.13	4.38 9.07	4.37 9.04	4.36 9.02	5
6	5.99 13.74	5.14 10.92	4.76 9.78	4.53 9.15	4.39 8.75	4.28 8.47	4.21 8.26	4.15 8.10	4.10 7.98	4.06 7.87	4.03 7.79	4.00 7.72	3.96 7.60	3.92 7.52	3.87 7.39	3.84 7.31	3.81 7.23	3.77 7.14	3.75 7.09	3.72 7.02	3.71 6.99	3.69 6.94	3.68 6.90	3.67 6.88	6
7	5.59 12.25	4.74 9.55	4.35 8.45	4.12 7.85	3.97 7.46	3.87 7.19	3.79 7.00	3.73 6.84	3.68 6.71	3.63 6.62	3.60 6.54	3.57 6.47	3.52 6.35	3.49 6.27	3.44 6.15	3.41 6.07	3.38 5.98	3.34 5.90	3.32 5.85	3.29 5.78	3.28 5.75	3.25 5.70	3.24 5.67	3.23 5.65	7
8	5.32 11.26	4.46 8.65	4.07 7.59	3.84 7.01	3.69 6.63	3.58 6.37	3.50 6.19	3.44 6.03	3.39 5.91	3.34 5.82	3.31 5.74	3.28 5.67	3.23 5.56	3.20 5.48	3.15 3.36	3.12 538	3.08 5.20	3.05 5.11	3.03 5.06	3.00 5.00	2.98 4.96	2.96 4.91	2.94 4.88	2.93 4.66	8
9	5.12 10.56	4.26 8.02	3.86 6.99	3.63 6.42	3.48 6.06	3.37 5.80	3.29 5.62	3.23 5.47	3.18 5.35	3.13 5.26	3.10 5.18	3.07 5.11	3.02 5.00	2.98 4.92	2.93 4.80	2.90 4.73	2.86 4.64	2.82 4.56	2.80 4.51	2.77 4.45	2.76 4.41	2.73 4.36	2.72 4.33	2.71 4.31	9
10	4.96 10.04	4.10 7.56	3.71 6.55	3.48 5.99	3.33 5.64	3.22 5.39	3.14 5.21	3.07 5.06	3.02 4.95	2.97 4.85	2.94 4.78	2.91 4.71	2.86 4.60	2.82 4.52	2.77 4.41	2.74 4.33	2.70 4.25	2.67 4.17	2.64 4.12	2.61 4.05	2.59 4.01	2.56 3.96	2.55 3.93	2.54 3.91	10
11	4.84 9.65	3.98 7.20	3.59 6.22	3.36 5.67	3.20 5.32	3.09 5.07	3.01 4.88	2.95 4.74	2.90 4.63	2.86 4.54	2.82 4.46	2.79 4.40	2.74 4.29	2.70 4.21	2.65 4.10	2.61 4.02	2.57 3.94	2.53 3.86	2.50 3.80	2.47 3.74	2.45 3.70	2.42 3.66	2.41 3.62	2.40 3.60	11

5％（上の数値）と1％（下の数値）

ϕ_2	ϕ_1自由度 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	ϕ_2
12	4.75 9.33	3.88 6.93	3.49 5.95	3.26 5.41	3.11 5.06	3.00 4.82	2.92 4.65	2.85 4.50	2.80 4.39	2.76 4.30	2.72 4.22	2.69 4.16	2.64 4.05	2.60 3.98	2.54 3.86	2.50 3.78	2.46 3.70	2.42 3.61	2.40 3.56	2.36 3.49	2.35 3.46	2.32 3.41	2.31 3.38	2.30 3.36	12
13	4.67 9.07	3.80 6.70	3.41 5.74	3.18 5.20	3.02 4.86	2.92 4.62	2.84 4.44	2.77 4.30	2.72 4.19	2.67 4.10	2.63 4.02	2.60 3.96	2.55 3.85	2.51 3.78	2.46 3.67	2.42 3.59	2.38 3.51	2.34 3.42	2.32 3.37	2.28 3.30	2.26 3.27	2.24 3.21	2.22 3.18	2.21 3.16	13
14	4.60 8.86	3.74 6.51	3.34 5.56	3.11 5.03	2.96 4.69	2.85 4.46	2.77 4.28	2.70 4.14	2.65 4.03	2.60 3.94	2.56 3.86	2.53 3.80	2.48 3.70	2.44 3.62	2.39 3.51	2.35 3.43	2.31 3.34	2.27 3.26	2.24 3.21	2.21 3.14	2.19 3.11	2.16 3.06	2.14 3.02	2.13 3.00	14
15	4.54 8.68	3.68 6.36	3.29 5.42	3.06 4.89	2.90 4.56	2.79 4.32	2.70 4.14	2.64 4.00	2.59 3.89	2.55 3.80	2.51 3.73	2.48 3.67	2.43 3.56	2.39 3.48	2.33 3.36	2.29 3.29	2.25 3.20	2.21 3.12	2.18 3.07	2.15 3.00	2.12 2.97	2.10 2.92	2.08 2.89	2.07 2.87	15
16	4.49 8.53	3.63 6.23	3.24 5.29	3.01 4.77	2.85 4.44	2.74 4.20	2.66 4.03	2.59 3.89	2.54 3.78	2.49 3.69	2.45 3.61	2.42 3.55	2.37 3.45	2.33 3.37	2.28 3.25	2.24 3.18	2.20 3.10	2.16 3.01	2.13 2.96	2.09 2.89	2.07 2.86	2.04 2.80	2.02 2.77	2.01 2.75	16
17	4.45 8.40	3.59 6.11	3.20 5.18	2.96 4.67	2.81 4.34	2.70 4.10	2.62 3.93	2.55 3.79	2.50 3.68	2.45 3.59	2.41 3.52	2.38 3.45	2.33 3.35	2.29 3.27	2.23 3.16	2.19 3.08	2.15 3.00	2.11 2.92	2.08 2.86	2.04 2.79	2.02 2.76	1.99 2.70	1.97 2.67	1.96 2.65	17
18	4.41 8.28	3.55 6.01	3.16 5.09	2.93 4.58	2.77 4.25	2.66 4.01	2.58 3.85	2.51 3.71	2.46 3.60	2.41 3.51	2.37 3.44	2.34 3.37	2.29 3.27	2.25 3.19	2.19 3.07	2.15 3.00	2.11 2.91	2.07 2.83	2.04 2.78	2.00 2.71	1.98 2.68	1.95 2.62	1.93 2.59	1.92 2.57	18
19	4.38 8.18	3.52 5.93	3.13 5.01	2.90 4.50	2.74 4.17	2.63 3.94	2.55 3.77	2.48 3.63	2.43 3.52	2.38 3.43	2.34 3.36	2.31 3.30	2.26 3.19	2.21 3.12	2.15 3.00	2.11 2.92	2.07 2.84	2.02 2.76	2.00 2.70	1.96 2.63	1.94 2.60	1.91 2.54	1.90 2.51	1.88 2.49	19
20	4.35 8.10	3.49 5.85	3.10 4.94	2.87 4.43	2.71 4.10	2.60 3.87	2.52 3.71	2.45 3.56	2.40 3.45	2.35 3.37	2.31 3.30	2.28 3.23	2.23 3.13	2.18 3.05	2.12 2.94	2.08 2.86	2.04 2.77	1.99 2.69	1.96 2.63	1.92 2.56	1.90 2.53	1.87 2.47	1.85 2.44	1.84 2.42	20
21	4.32 8.02	3.47 5.78	3.07 4.87	2.84 4.37	2.68 4.04	2.57 3.81	2.49 3.65	2.42 3.51	2.37 3.40	2.32 3.31	2.28 3.24	2.25 3.17	2.20 3.07	2.15 2.99	2.09 2.88	2.05 2.80	2.00 2.72	1.96 2.63	1.93 2.58	1.89 2.51	1.87 2.47	1.84 2.42	1.82 2.38	1.81 2.36	21
22	4.30 7.94	3.44 5.72	3.05 4.82	2.82 4.31	2.66 3.99	2.55 3.76	2.47 3.59	2.40 3.45	2.35 3.35	2.30 3.26	2.26 3.18	2.23 3.12	2.18 3.02	2.13 2.94	2.07 2.83	2.03 2.75	1.98 2.67	1.93 2.58	1.91 2.53	1.87 2.46	1.84 2.42	1.81 2.37	1.80 2.33	1.78 2.31	22
23	4.28 7.88	3.42 5.66	3.03 4.76	2.80 4.26	2.64 3.94	2.53 3.71	2.45 3.54	2.38 3.41	2.32 3.30	2.28 3.21	2.24 3.14	2.20 3.07	2.14 2.97	2.10 2.89	2.04 2.78	2.00 2.70	1.96 2.62	1.91 2.53	1.88 2.48	1.84 2.41	1.82 2.37	1.79 2.32	1.77 2.28	1.76 2.26	23
24	4.26 7.82	3.40 5.61	3.01 4.72	2.78 4.22	2.62 3.90	2.51 3.67	2.43 3.50	2.36 3.36	2.30 3.25	2.26 3.17	2.22 3.09	2.18 3.03	2.13 2.93	2.09 2.85	2.02 2.74	1.98 2.66	1.94 2.58	1.89 2.49	1.86 2.44	1.82 2.36	1.80 2.33	1.76 2.27	1.74 2.23	1.73 2.21	24
25	4.24 7.77	3.38 5.57	2.99 4.68	2.76 4.18	2.60 3.86	2.49 3.63	2.41 3.46	2.34 3.32	2.28 3.21	2.24 3.13	2.20 3.05	2.16 2.99	2.11 2.89	2.06 2.81	2.00 2.70	1.96 2.62	1.92 2.54	1.87 2.45	1.84 2.40	1.80 2.32	1.77 2.29	1.74 2.23	1.72 2.19	1.71 2.17	25
26	4.22 7.72	3.37 5.53	2.98 4.64	2.74 4.14	2.59 3.82	2.47 3.59	2.39 3.42	2.32 3.29	2.27 3.17	2.22 3.09	2.18 3.02	2.15 2.96	2.10 2.86	2.05 2.77	1.99 2.66	1.95 2.58	1.90 2.50	1.85 2.41	1.82 2.36	1.78 2.28	1.76 2.25	1.72 2.19	1.70 2.15	1.69 2.13	26

付　表

F 分　布　表



$\phi_2 \backslash \phi_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	ϕ_1 / ϕ_2
1	648.	800.	864.	900.	922.	937.	948.	957.	963.	969.	977.	985.	993.	997.	1001.	1006.	1010.	1014.	1018.	1
2	38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5	2
3	17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5	14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9	3
4	12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26	4
5	10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02	5
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85	6
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14	7
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67	8
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33	9
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08	10
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88	11
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72	12
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60	13
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49	14
15	6.20	4.76	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.58	2.52	2.46	2.40	15
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32	16
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25	17
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19	18
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13	19
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09	20
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04	21
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00	22
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97	23
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94	24
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91	25
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88	26
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85	27
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83	28
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81	29
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79	30
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64	40
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48	60
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31	120
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00	∞
ϕ_2 / ϕ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	$\phi_2 \backslash \phi_1$