白鷗大学論集　第26巻　第２号

研究ノート

分散分析

沖　津　　　直

Analysis of Variance

OKITSU Tadashi

はじめに
1．いくつかの平均値の差の検定
2．１元配置の分散分析

はじめに

本稿の目的は、いくつかの平均値の差の検定、１元配置の分散分析における理論構造、その考え方をわかりやすく、簡明に説明することである。まず、その使い方を簡単な例題を用いて、解説していく。

分散分析は、1916年から1926年ごろにかけて英国の統計学者 R.A, フイシャーによって展開され、開発され主に農業調査に用いられた。その後、ほとんどすべての科学領域に応用できることがわかり、画期的な幅の広い研究分野となっている。実験というものは変数間の関係を取り扱うものですが、フイシャーは小麦の収量について、３種類のバラツキを分けて考え

る必要があることに気づきました。まず、植物の生育に直接左右する天候の影響によるバラツキであり、つぎに土壌の影響で土壌が持つ栄養が次第に減ってゆくというバラツキであり、最後がバラツキのゆっくりした変化で、ランダムに発生する小さな変動である。

分散分析とは、実験データに関するさまざまな統計モデルを使い、観測されたバラツキを分類する方法であり、フイシャーは、分散を分けて考えることを基礎にさまざまな統計手法を開発した。スチュデントの t 検定は２組のデータ平均値に統計的な有意差があるかどうかを見るものですが、分散分析は、F 検定を行ったあとに F 表を使い、２組以上のグループ平均値に有意差が存在するかどうかを見るものである。そして、有意差がある場合、t 検定を２つの平均値の差に適用すれば、どこに違いがあるかがわかるわけである。

１．いくつかの平均値の差の検定（１元分類）

２つのグループの標本平均の間の差の有意性検定は、通常 t 分布を用いる。しかし、３つ以上の標本平均値の間の差が有意であるかどうかを検定するとき、いちいち２つづつ交互に検定していくことは、時間もかかり煩わしいし、非常に非効率的である。そこで、３つ以上の標本平均値の差の有意性検定を同時にできるものが、ここで扱う分散分析（analysis of variance）である。分散分析の手法は、フイシャー以来高度に発達しているが、ここでは基本構造のいくつかの手法と使い方を取り上げて考えていくことにする。

まず、各母集団とも平均 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ で分散が $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_k^2$ の正規分布に従っているものと仮定する。すなわち、１番目から k 番目までの各確率変数は、N（μ_i, σ_i^2）（$i = 1, 2, \cdots\cdots, k$）に従っている。さて、説明を解りやすくするために、次のような単純化された例題を用いて、手法の内容を進めていくことにする。

いま、同じ大きさの分散σ^2をもつk個の正規母集団からとったk組の標本観察値を次のように配列する。

母集団	1	2	・・・	k	行平均
標本観察値	x_{11}	x_{12}	・・・	x_{1k}	$\overline{x}_{1\cdot}$
	x_{21}	x_{22}	・・・	x_{2k}	$\overline{x}_{2\cdot}$
	⋮	⋮	⋱	⋮	
	$x_{n_1 1}$	$x_{n_2 2}$	・・・	$x_{n_k k}$	$\overline{x}_{nk\cdot}$
列平均	$\overline{x}_{\cdot 1}$	$\overline{x}_{\cdot 2}$	・・・	$\overline{x}_{\cdot k}$	x

x_{ij}は第j組の標本のi番目の観察値で、j組の標本の大きさをn_j、その標本平均値を$\overline{x}_{\cdot j}$、母平均をμ_j、$n=\sum_{j=1}^{k} n_j$とする。$\overline{x}$は総平均をあらわしている。したがって、検定すべき仮説は

$$\mu_1=\mu_2=\cdot\cdot\cdot=\mu_k$$

となる。

例題１　３つのクラスにある科目についてそれぞれ異なる教え方が実施されているとしよう。これらの異なる教え方が成績に異なる影響を与えているかどうかを検定したい。いま、受講後の各クラスから、無作為に５人ずつのランダム標本が選ばれその成績結果が次の１表のように示されている。

ここで、要点をわかりやすくするために、つぎのような各設問を設定し、これらを説明しながら解説をくわえて進めていくことにする。

（１）各クラスの平均点

（２）３クラスの総平均点

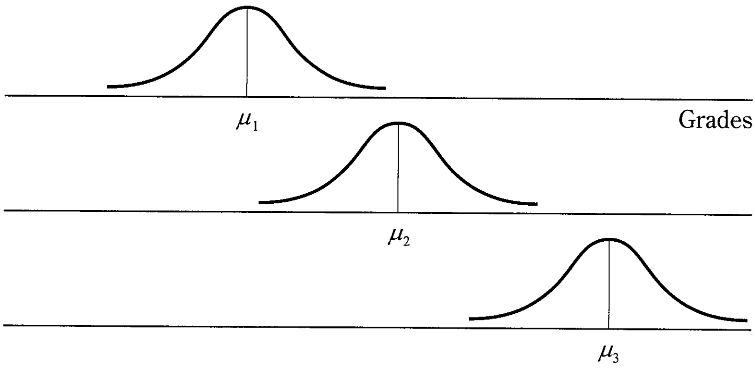
（３）等平均の帰無仮説のもとに（１）式および（２）式からそれぞれの母分散σ^2の不偏推定値を求める。

（４）成績に有意な差があるかどうかを有意水準５％で検定する。

1表

	Aクラス	Bクラス	Cクラス
	3	4	7
	6	7	6
	5	7	7
	4	4	7
	7	8	8
計	25	30	35

このような設定問題で各クラスの得点の平均は、μ_1、μ_2、μ_3であるが、分散については$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma_3^2=\sigma^2$（共通の分散）の正規分布に従っていると仮定されている。この仮定は、異なる教え方が平均点に異なる影響を与えても、得点の散らばりには影響を与えないことを意味しており、次の1図のように図示できよう。



1図　3つのクラスの得点分布

この例題1では、教え方に違いがあるかどうかであるから、帰無仮説は

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

となる。対立仮説としては、3つの平均値はすべて等しくない、ということになる。この問題ではつぎのように接近できる。まず、3つのクラスは一定の分散σ^2をもつ3つの母集団である。もし、$\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu$（共通

の平均値）と仮定するならば、３つの母集団はひとつの大きな正規母集団N（μ，σ^2）とみなすことができる。したがって、３つの標本はひとつの正規母集団からの標本とみなすことができよう。これら３つの標本分散はそれぞれつぎのようになる。

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}(x_{i1} - \bar{x}_{.1})^2$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}(x_{i2} - \bar{x}_{.2})^2$$

$$s_3^2 = \frac{1}{n_3}\sum_{i=1}^{n_3}(x_{i3} - \bar{x}_{.3})^2$$

したがって、結合分散は次のようになる。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 + n_3 s_3^2}{n_1 + n_2 + n_3 - 3} = \frac{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x}_{.j})^2}{n-3} \qquad (1)$$

この結合分散は、帰無仮説H_0が真であるか否かにかかわらず、σ^2の推定値となりうる。これを級内から推定された分散という。つぎに、分散σ^2を推定する第２の方法は、$\bar{x}$の分布の推定値を表す$\bar{x}$の標本分布理論より導かれる$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma^2/n$を利用することである。（参考文献１．p817～ p818参照）。これは、つぎのようになる。

$$\sigma^2 = n\sigma_{\bar{x}}^2$$

したがって、$\sigma_{\bar{x}}^2$を推定することによってσ^2を推定することができる。第１の標本に対して

$$\sigma^2 = n_1\sigma_{\bar{x}}^2 = n_1(\bar{x}_{.1} - \bar{x})^2$$

となる。第２と第３の標本に対しても、

$$\sigma^2 = n_2\sigma_{\bar{x}}^2 = n_2(\bar{x}_{.2} - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = n_3\sigma_{\bar{x}}^2 = n_3(\bar{x}_{.3} - \bar{x})^2$$

したがって、これらの左辺と右辺をそれぞれ合計すると、

$$3\sigma^2 = \sum_{j=1}^{3} n_j(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 \qquad \therefore \qquad \sigma^2 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} n_j(\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2$$

不偏推定量を得るためには、３の代わりに、３－１＝２の自由度を用い

る。すなわち、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3} n_j (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2 \qquad (2)$$

は、σ^2を推定する第2の方法である。（2）式を級間から推定された分散という。

この分散は、

（a）すべての標本が同じ母集団から抽出された場合

（b）別個の母集団だが、母集団平均がすべて等しい場合

のときのみσ^2の推定値となりうる。

明らかに、（a）と（b）は同意義である。すべての母集団平均が等しくないとき、級間から推定される分散は、$\sigma^2 + c$となるであろう。$c > 0$は母集団平均の不均等による誤差である。したがって、（1）式と（2）式の次の比率

$$F = \frac{\dfrac{1}{3-1}\displaystyle\sum_{j=1}^{3} n_j (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2}{\dfrac{\displaystyle\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - \bar{x}_{\cdot j})^2}{n-3}} \qquad (3)$$

をとるとき、Fが有意におおきければ、平均の均等を疑う理由が存在する。あるいは各標本が同じ母集団から抽出された、ということを疑うことができる。もし、$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$の仮説が真であれば、（1）式と（2）式の両推定量は、母分散のσ^2を推定しているので同じぐらいの大きさの値であると期待できる。すなわち、（1）式と（2）式の比率は1に近いであろうと期待できるのである。逆に、もし$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$の仮説が真でないならば、標本平均$\bar{x}_{\cdot 1}$、$\bar{x}_{\cdot 2}$、$\bar{x}_{\cdot 3}$は、偶然に帰せられる以上に$\bar{x}$からも離れているであろうと期待される。このことは、分子の推定量（2）は、$(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$を含んでいるから大きくなることを意味している。しかし、分母の結合された標本分散から得られる推定量（1）は、$(x_{ij} - \bar{x}_{\cdot j})^2$がそれぞれの標本内のあるものであるから、$\bar{x}_{\cdot j}$の違いから影響をうけない。

したがって、当然、$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$の仮設が真でないならば、（３）式によって示されたF比は１よりも大きくなるであろう。ゆえに、F比が１よりも大きくなればなるほど、標本平均$\bar{x}_{\cdot j}$の間の変動がより大きくなり、したがって、母集団平均μ_jの間の差が大きいと推論することができよう。この分散分析の考え方は、これまでの同じ方法で行うことができる。以上のことを念頭におきながら例題１の各設問の解いていくと次のようになろう。

（１）$\bar{x}_{\cdot 1} = \dfrac{25}{5} = 5,\ \bar{x}_{\cdot 2} = \dfrac{30}{5} = 6,\ \bar{x}_{\cdot 3} = \dfrac{35}{5} = 7$

（２）$\bar{x} = \dfrac{25+30+35}{15} = 6$

（３）

	x_{i1},	$(x_{i1}-\bar{x}_{\cdot 1})^2$	x_{i2},	$(x_{i2}-\bar{x}_{\cdot 2})^2$	x_{i3},	$(x_{i3}-\bar{x}_{\cdot 3})^2$
	3	4	4	4	7	0
	6	1	7	1	6	1
	5	0	7	1	7	0
	4	1	4	4	7	0
	7	4	8	4	8	1
計	25	10	30	14	35	2

分散σ^2を推定する第１の方法は、（１）式より

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-x_{\cdot j})^2}{n-3} = \frac{1}{15-3}(10+14+2) = 2.17$$

分散σ^2を推定する第２の方法は（２）式より

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3} n_j(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2 = \frac{1}{3-1}(5)\left\{(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2\right\} = 5$$

したがって、（１）式と（２）式の比をとったF値を求めると、

（４）
$$F = \frac{\frac{1}{3-1}\sum_{j=1}^{3} n_j(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2}{\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_{\cdot j})^2} = \frac{5}{2.17} = 2.3$$

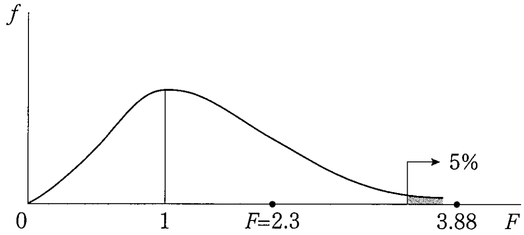
となる。一方、常に１以上のF比が予想されるので、有意水準も右片側

だけにとられる。自由度（2，12）の有意水準5％の対応する境界点は、付表の F 分布表（出所：参考文献1 p1086）より、

$$F_{12}^{2}(0.05)=3.88$$

である。標本から求めた F 比と境界点の大きさを比較すると、2図に示しているように、

$$F=2.3<F_{12}^{2}(0.05)=3.88$$



2図　自由度2、12の F 分布

となる。ゆえに、帰無仮設 H_0 を採択する。したがって、3クラスの得点の平均値の間には有意な差はみられない。すなわち、3つの標本平均は均等である、あるいは同じ母集団から抽出された、ということを支持している。

以上は、各標本の大きさ n_j がすべて等しい場合（$n_1=n_2=n_3$）であったが、n_j が同じでない場合にも適用できる。たとえば、標本が k 個ある場合の（1）式の一般式は、

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2}{n_j-1}=\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2}{n_jk-k} \quad (4)$$

また、標本ごとに大きさが違うときは、

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_{.j})^2}{n-k} \quad (5)$$

となる。一方、標本が k 個ある場合の（2）式の一般式は、

$$\hat{\sigma}^2=\frac{n_j\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{.j}-\bar{x})^2}{k-1} \quad (6)$$

また、標本ごとに大きさが違うときは、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2}{k-1} \qquad (7)$$

となる。

（4）式あるいは（5）式と（6）式あるいは（7）式とはいずれも母分散の不偏推定量である。4式の$\hat{\sigma}^2$はk個の標本が同じひとつの母集団に属するという仮定のもとに計算された母分散の推定値であるが、（6）式の$\hat{\sigma}^2$は、このような前提とは関係なしに個々の標本内部のバラツキから直接に計算した母分散の推定値である。もし、帰無仮説H_0 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots$, μ_kが正しくk組の標本がいずれも同一母集団からの標本であったとすれば、この2つの母分散推定量（4）式の$\hat{\sigma}^2$と（6）式の$\hat{\sigma}^2$の期待値は一致するはずであり、また、仮説H_0が間違っていて母平均μ_1, μ_2, ・・・, μ_kのうちに等しくないものがあるときには、（4）式の$\hat{\sigma}^2$の期待値は$\hat{\sigma}^2$の期待値よりも大となるはずである。したがって、検定統計量として、

$$F = \frac{（4）式から推定された分散}{（6）式から推定された分散}$$

を考え、Fが1よりも極端に大きくなる場合に仮設H_0を棄てるという方法で検定すればよい。このとき、検定統計量Fの自由度は、$k-1$, $n-k$である。

平均値の有意検定は分散分析の最も簡単な応用例である。この応用では、観察値を1種類の効果要因についての効果の有無を検定しているので、このような効果要因の配置法を一元配置という。効果要因の観察は1種類についてだけでなく、同時に2種類またはそれ以上の種類の効果要因について観察することもある。たとえば、作物の品種と肥料の配合を組み合わせるような場合である。このような配置法を2元配置あるいは一般に2種類以上の配置法を多元配置という。2元配置は次の機会にとりあげたい。

２．１元配置の分散分析

前述した平均値の差の有意検定の方法は分散分析と呼ばれる統計分析法の一つの応用であるが、分散分析法というのは変数の分散を種々の要因に分解して、変化の原因をさぐる方法ということができよう。

いま、前節のところで、観察値 x_{ij} の全体を正規母集団からの大きさ $n=\sum_{j=1}^{k}n_j$ のひとつの標本と考えると、母分散の不偏推定量は、

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x})^2}{n-1} \qquad (8)$$

である。これは σ^2 の第３の推定の方法である。この式の分子は、つぎの形に書き改めることができる。

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x})^2=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_{\cdot j})^2+\sum_{j=1}^{k}n_j(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2 \qquad (9)$$

$$S_T \quad = \quad S_E \quad + \quad S_A$$

S_T は観察値の総平均からのバラツキの全体であり総変動といい、S_E は同一標本内の観察値のバラツキを示し、S_A は標本平均値内のバラツキを示している。S_E は観察値をいくつかの組に分けたときの級内のバラツキを示すから、級内変動とか誤差変動、これに対して S_A を級間変動という。（９）式は観察値の総変動が誤差変動（１元配置のときには、こちらの言葉が適している）と級内変動に分けられることを示している。いいかえると、級間変動は観察値の総変動のうちの、たとえば例題１の場合であれば教え方によって説明される変動を表しており、説明されないで残った変動分が誤差変動である。一元配置の場合、総変動を唯ひとつの変動（例題１の場合、教え方）のよって説明しようとするものであり、教え方以外の変動で得点に影響を与えるものを含めて残ったものが説明されない変動となる。当然、後者の変動は大きくなる傾向になり、その結果として、F 比の分母が大きくなり有意差が現れにくくなる。１変数よりも２変数あるいは３変数の場合が、説明されないで残る変動の部分は小さくなる傾向に

なり、正確な検定が可能となる。

さて、誤差変動は標本ごとの内部変化であるから、同一母集団の仮説が正しいか否かとに関係なく、いわば偶然のバラツキを示すと考えることができる。一方、級内変動はもし同一母集団の仮説が正しければ偶然の変化であるが、仮説が真でなくて標本ごとに母集団が違うのであれば、そのバラツキの大部分は母集団の差、したがって平均値の有意差に帰せられることになる。したがって、級間変動が誤差変動に比べて偶然として説明できる以上に大であれば、帰無仮説でたてたいくつかの平均値には違いがあることになる。

以上の説明は、次のような形で正確に定式化することができる。確率変数 X_{ij} が平均値 μ_j 分散 σ_j^2（$=\sigma^2$）の正規分布をすると考える。X_{ij} の観測値 x_{ij} は次のように書くことができる。

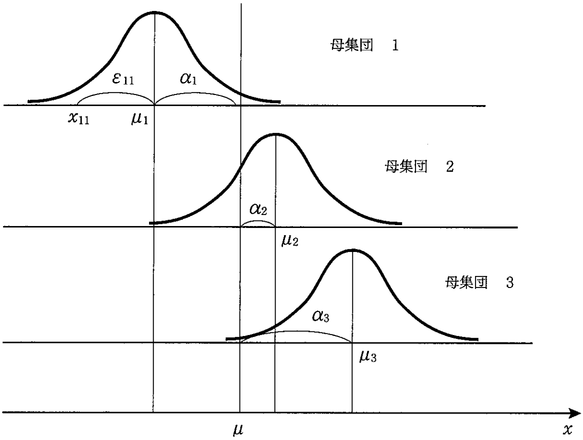
$$x_{ij}=\mu_j+\varepsilon_{ij} \qquad \begin{array}{l} i=1,2\cdot\cdot\cdot, n_j \\ j=1,2\cdot\cdot\cdot, k \end{array}$$

ここで、ε_{ij} は撹乱項で平均値0、分散 σ^2 の独立な正規分布をするものとする。さらに、平均値 μ_j を $\mu+\alpha_j$ と書き換えると、

$$x_{ij}=\mu+\alpha_j+\varepsilon_{ij}$$

ここで、μ および α_j はそれぞれ次式で定義されている。

$$\left.\begin{array}{ll} \mu=\dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\mu_j & \\ \alpha_j=\mu_j-\mu & j=1,2, \quad k \end{array}\right\} \qquad (10)$$



３図　３つのクラスの得点分布

以上のμ、μ_j、α_jの関係を図を用いて視覚的に示すことにしよう。3図は３つの母集団を描き、μ_1、μ_2、μ_3がμからα_1、α_2、α_3離れている状況を表現している。μは総平均、α_jは各母集団平均μ_jの総母集団の平均μからの偏差であり、個々の母集団の固有の効果を示し、級効果という。(10) 式の下の式を総計すると、

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j=\sum_{j=1}^{k}(\mu_j-\mu)=\sum_{j=1}^{k}\mu_j-k\mu=0$$

である。これは、総平均μの定義の仕方の結果である。

$\alpha_j=0$　($j=1, 2, \cdots, k$) のとき、

$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k$

すなわち、$\alpha_j=0$はすべての母集団の平均μ_jが等しいことを示し、これは帰無仮説を表す別の表現法である。どちらで表しても同じである。

(11) 式から (13) 式で示される確率変数の構造の理論模型を線形モデルという。いくつかの平均値の差の検定は、このような理論モデルで級効果ゼロの仮説、すなわち、

H_0：$\alpha_j=0$　($j=1, 2, \cdots, k$)

H_1：$\alpha_j\neq 0$　(少なくともjの１つの値に対して)

を検定することを意味する。

さて、x_{ij} は正規確率変数で、その母分散は σ_j^2（$=\sigma^2$）であるから、

$$\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x})^2}{\sigma^2}=\frac{S_T}{\sigma^2} \tag{11}$$

は自由度 $\phi = n-1$ の χ^2分布をする。同様に、

$$\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_{\cdot j})^2}{\sigma^2}=\frac{S_E}{\sigma^2} \tag{12}$$

は自由度 $\phi = n-k$ の χ^2分布に従い、また、

$$\frac{\sum_{j=1}^{k}n_j(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2}{\sigma^2}=\frac{S_A}{\sigma^2} \tag{13}$$

は自由度 $\phi = k-1$ の χ^2分布をし、かつ S_E と S_A に独立であることがわかっている。さらに、χ^2変数の期待値は自由度に等しいから、

$$\left.\begin{aligned} &E\left(\frac{S_T}{n-1}\right)=\sigma^2 \\ &E\left(\frac{S_E}{n-k}\right)=\sigma^2 \\ &E\left(\frac{S_A}{k-1}\right)=\sigma^2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

の関係が得られる。これら3つの統計量は、いずれも母分散 σ^2の不偏推定量である。2番目の期待値は帰無仮説の真偽に関わりなく成り立つのに対して、3番の期待値は、帰無仮説が真のときのみ成り立つのが特徴である。後の2者は互いに独立であるから、検定仮説が真で母集団が1つであれば、次の分散比

$$F=\frac{S_A/k-1}{S_E/n-k} \tag{15}$$

は自由度 $\phi_1 = k-1$、$\phi_2 = n-k$ の F 分布をする。そして、右片側検定で有意水準を α とすれば、F 検定の棄却域は、次の境界点 $F_{\phi_2}^{\phi_1}$（α）よりも、上側の領域で与えられる。(15) 式は（8）式と同じ内容であるが、分散分析表から接近するときの分散比である。分散分析の計算は、通常次のような2表のようにまとめられる。2表の中の S_T、S_E、S_A の計算は、

次の式によるのが便利である。

$$\left.\begin{aligned} S_T &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\{x_{ij}{}^2 - \frac{(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2}{n}\} \\ S_E &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}{}^2 - \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{(x_{\cdot j})^2}{n_j}\right\} \\ S_A &= \sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{(x_{\cdot j})^2}{n_j}\right\} - \frac{(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij})^2}{n} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

2表　1元配置の分散分析表（反復のある場合）

要因	平方和	自由度	平均平方	F
級間	$S_A = \sum_{j=1}^{k} n_j(\overline{x}_{ij} - \overline{x})^2$	$k-1$	$S_A/k-1$	$F = \dfrac{S_A/(k-1)}{S_E/(n-k)}$
誤差	$S_E = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \overline{x}_{\cdot j})^2$	$n-k$	$S_E/n-k$	
計	$S_T = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \overline{x})^2$	$n-1$		

なお、一元配置の場合において、帰無仮説が棄却されるとき、各母集団の母平均 μ_j の95％信頼区間は、次の式で求められる。

$$\overline{x}_{ij} - t_{0.05}\sqrt{\frac{S_E/n-k}{n}} < \mu_j < \overline{x}_{\cdot j} \pm t_{0.05}\sqrt{\frac{S_E/n-k}{n_i}} \tag{17}$$

ここで、$t_{0.025}$の自由度は、$n-k$ である。

以上に説明してきたことを、さらに次のような２、３の例題を用いて具体的に計算し、その使い方を示すことにしよう。

例題２　ある一定の耕作地にある作物に種類の異なる５種の肥料を決めて、それぞれ４回反復して与えたところ、次のような収穫の結果が得られた。収穫に有意な差があるかどうかを検定しよう。収穫高は正規分布に従

うものとする。有意水準α＝0.05とする。

3表　収穫高のデータおよび計算

反復	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	計	平方表				
1回目	3	5	7	12	19		9	25	49	144	361
2回目	5	6	10	16	24		25	36	100	256	576
3回目	2	6	8	12	17		4	36	64	144	289
4回目	3	9	9	10	18		9	81	81	100	324
$x_{\cdot j}$	13	26	34	50	78		47	178	29	644	1,550
$\sum_i x_{ij}$	47	178	294	644	1,550	2,713					
$(x_{\cdot j})^2$	169	676	1,156	2,500	6,084	10,585					
$\dfrac{(x_{\cdot j})^2}{n_j}$	$\dfrac{169}{4}$	$\dfrac{676}{4}$	$\dfrac{1,156}{4}$	$\dfrac{2,500}{4}$	$\dfrac{6,084}{4}$						

この場合、5種類の平均収穫量をμ_1、μ_2、・・・、μ_5とするとして仮説を次のように設定する。

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 \\ H_1 : \mu_j \quad j=1，2，\cdots，5 \text{ はすべて等しくない} \end{cases}$$

あるいは仮説を次のように設定する。

$H_0 : \alpha_j = 0$　（j＝1，2，3，4，5）

$H_1 : \alpha_j \neq 0$　（少なくともjの1つの値に対して）

まず、分散分析表を作成するために必要な全変動S_T、誤差変動S_E、級間変動S_Aの計算を行う。データを種類ごとに合計し、3表の右側のように、それらの二乗値の合計などを計算する。さらに、3表の左側下のように、各標本のデータの合計、それらの二乗値、右側の平方表の合計などを左側の下に移して計算を行ってある。

$$S_T = 2713 - \frac{(20)^2}{20} = 692.95$$

$$S_E = 2713 - \frac{10585}{4} = 66.75$$

$$S_A = \frac{10585}{4} - \frac{(201)^2}{20} = 2646.25 - 2020.05 = 626.2$$

これらの計算が正確だったかどうかを、（9）式の計算で確かめておく。

$$S_T - S_E = 692.75 - 66.75 = 626.2$$

以上の計算より、次の4表が作成できる。検定統計量 F の値は、

4表　1元配置の分散分析表（反復のない場合）

要因	平方和	自由度	平均平方	F
級間	S =626.2	$k-1=5-1=4$	156.55	$F=\dfrac{156.55}{4.45}=35.2$
誤差	S =66.75	$n-k=20-5=15$	4.45	
全変動	S =692.95	$n-1=20-1=19$		

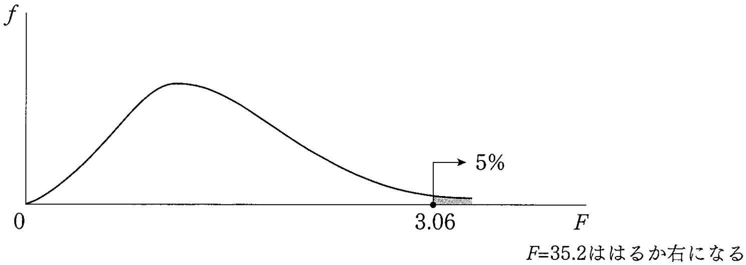
$$F = \frac{S_A / k-1}{S_E / n-k} = \frac{156.55}{4.45} = 35.2$$

となる。一方、有意水準 $\alpha=0.05$ に対応する検定の境界値は、自由度（$k-1=4$、$n-k=15$）であるから、F 分布表より、

$$F_{15}^{4}(0.05) = 3.06$$

を得る。F の値と境界値の大小を比較すると、

$$F = 35.2 > F_{15}^{4}(0.05) = 3.06$$



4図　自由度4、15の F 分布

となる。ゆえに、帰無仮説 H_0 を棄却する。したがって、それぞれ異なる種類の肥料を与えられた作物の平均収穫の間には、有意な差があると考えられる。ひとまず、肥料 A_5 が高い収穫高をもたらすと判断できよう。そ

れでは、５種類の肥料を与えた作物の平均収穫高 μ_j（j＝１，２，・・・，５）はいくらぐらいだろうか。いま、μ_j の信頼係数95％の信頼区間を求めてみよう。(17) 式に、それぞれに該当する数値を４表から見つけて代入すると、

$$\frac{13}{4}-2.131\sqrt{\frac{4.45}{4}}<\mu<\frac{13}{4}+2.131\sqrt{\frac{4.45}{4}}$$

$$\therefore \quad 1 < \mu_1 < 5.5$$

以下同様に、

$$4.25 < \mu_2 < 8.75$$

$$6.25 < \mu_3 < 10.75$$

$$10.25 < \mu_4 < 14.75$$

$$17.25 < \mu_5 < 21.75$$

となる。

例題３　次の５表は、土質のまったく等しいとされる土地区画に、化学肥料 A_1、A_2、A_3をそれぞれ４回反復して施して得られたある種の小麦の１反あたりの収穫を示している。次の設問を回答してみよう。

５表

反復	A_1	A_2	A_3
1	48	47	49
2	49	49	51
3	50	48	50
4	49	48	50

（１）肥料の種類ごとの平均収穫高

（２）すべての種類に対する総平均

（３）全変動 S_T、誤差変動 S_E、級間変動 S_A をそれぞれ求めて分散分析表を作成せよ。

（４）等平均の帰無仮説のもとでの級間変動、誤差変動からそれぞれ母分

散σ^2の不偏推定値を求める。

（５）収穫に有意な差があるかどうかを検定せよ。収穫は正規分布に従うものとする。有意水準５％とする。もし、有意なら、μ_jの95％信頼区間を求めてみよう。

変動の値に影響を与えないから、すべてのデータから、計算を簡略にするため、ある適切な数、この例では45を引いておく。したがって、分散分析表を作成するために必要な計算は、つぎの６表のようになる。

６表

反復	A_1	A_2	A_3	計	平方表		
1	3	2	4		9	4	16
2	4	4	6		16	16	36
3	5	3	5		25	9	25
4	4	3	5		16	9	25
$x_{\cdot j}$	16	12	20	48	66	38	102
$\sum_i x_{ij}^2$	66	38	102	206			
$(x_{\cdot j})^2$	256	144	400	800			
$\dfrac{(\sum x_{\cdot j})^2}{n_j}$	$\dfrac{256}{4}$	$\dfrac{144}{4}$	100	200			

解（１）

$$\bar{x}_{\cdot 1}=\frac{16}{4}=4,\ \bar{x}_{\cdot 2}=\frac{12}{4}=3,\ \bar{x}_{\cdot 3}=\frac{20}{4}=5$$

となる。したがって、最初に45をすべての数値から引いてあったから平均収穫量は45を加えて、A_1、A_2、A_3それぞれ49、48、50である。

（２）$\bar{x}=\dfrac{48}{12}=4$

よって、もとのデータの総平均は、45を加えて１反当り45＋４＝49kgである。

（３）全変動

$$S_T=\sum_j\sum_i(x_{ij}-\bar{x})^2=(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2$$
$$+(2-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+$$

$(6-4)^2+(5-4)^2+(5-4)^2=14$

$$S_E=\sum_j\sum_i(x_{ij}-\bar{x}_{\cdot j})^2=(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2$$
$$+(2-3)^2+(4-3)^2+(3-3)^2+(3-3)^2+(4-5)^2+$$
$$(6-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2=6$$

$$S_A=\sum_{j=1}^{k}n_j(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2=4\ \{(4-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2\}=8$$

例題1と同じように、6表の諸計算を利用して求めると、つぎのようになる。

（4）

$$S_T=206-\frac{(48)^2}{12}=14$$

$$S_E=206-\frac{800}{4}=6$$

$$S_A=\frac{800}{4}-\frac{(48)^2}{12}=8$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{j=1}^{k}n_j\ (\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2}{k-1}=\frac{8}{3-1}=4$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij}-\bar{x}_{\cdot j})^2}{n_jk-k}=\frac{6}{4\times3-3}=\frac{2}{3}$$

（5）この問題の仮説を、つぎのように設定する。

H_0：$\alpha_j=0$　　$j=1, 2, 3$

H_1：$\alpha_j\neq0$　　（少なくとも j の1つの値に対して）

6表の諸計算より、7表の分散分析表を作成し、検定統計量 F の値を求めると、

7表 1元配置の分散分析表

	平方和	自由度	平均平方	F
級 間	S＝8	$k-1=3-1=2$	4	$F=\dfrac{4}{2/3}=6$
誤 差	S＝6	$n-k=12-3=9$	$\dfrac{2}{3}$	
全変動	S＝14	$n-1=12-1=11$		

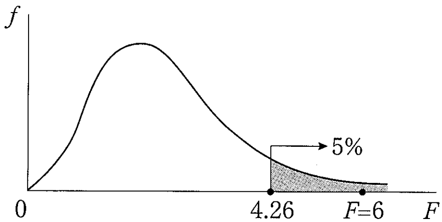
$$F=\frac{S_A/k-1}{S_E/n-k}=\frac{4}{2/3}=6$$

となる。一方、有意水準5％に対する F の境界点は、自由度（2，9）であるから、F 分布表より、

$$F_9^2(0.05)=4.26$$

を得る。両者の大小を比較すると、

$$F=6 \quad > \quad F_9^2(0.05)=4.26$$



5図 自由度2、9の F 分布図

となる。ゆえに、帰無仮設 H_0 を棄却する。したがって、それぞれ異なる種類の化学肥料を与えられた小麦の平均収穫量の間には、有意な差があると結論できる。

それでは、μ_j の95％信頼区間を求めてみよう。自由度 $n-k=12-3=9$ の t の境界点は、$t_{0.05}=2.262$ であるから、(17) 式にそれぞれの数値を代入すると、

$$49-2.262\sqrt{\frac{2/3}{4}}<\mu_1<49+2.262\sqrt{\frac{2/3}{4}}$$

$$\therefore \quad 48.08 < \mu_1 < 49.92$$

以下同様に、

$$47.08 < \mu_2 < 48.92$$

$$49.08 < \mu_3 < 50.92$$

となる。

以上のように、これまでの分散分析の問題は、ただ1つの変数あるいは因子の場合である。例題2においても肥料という因子だけが作物の収穫に影響をあたえるものとしてきた。土壌の質などについてはまったく考えず、同質なものとして扱ってきた。土壌の質が作物の収穫高に影響することはあきらかである。このように、この種の実験では、観察値や観測値に影響を与える変数はいくつも考えられる。たとえば、そのほかのものとして日照時間とか降雨量とか気温とかが考えられる。分類する変数を2つに限定した場合を2元配置の分散分析という。2元配置の分散分析は、次の機会に譲ることにしたい。

F 分布を使う利点は、次のように言うことができよう。これまでに述べてきたように、t 検定は、式の構造上2つが限界であるが、たとえばA、B、Cの3つの場合でも、AとB、BとC、AとCというふうに、3回の t 検定を行えば、統計的検定が出来ることになる。しかし、この方法には大きな欠点があり、間違いの確率が高くなってしまうのである。統計的検定には間違いを犯す可能性が存在する。たとえば有意水準を5％に設定するということは、間違いの確率を5％未満に抑え、95％の確率で正しい判断をすることを意味する。ところが、統計的検定を複数回行うと、正しい判断をする確率が95％よりも低くなってしまう。上の例でも3つの t 検定の結果が全て正しいことが理想であるけれども、ここで、個々の結果が正しい確率を95％に設定しても、3つの分析結果が全て正しい確率は、$0.95 \times 0.95 \times 0.95 = 0.875$ となるのである。正しい判断の確率が95％の分析をしたはずなのに、分析を3つ重ねると確率が88％程度に低下してしま

う。このように、3つ以上の平均値2つの平均値の差の検定に分けて分析すると、全体として間違いの確率が高くなり、分析の信頼性が低下してしまう。これが、3つ以上のカテゴリーを全て同時に扱う分析法が必要になる最大の理由なのである。

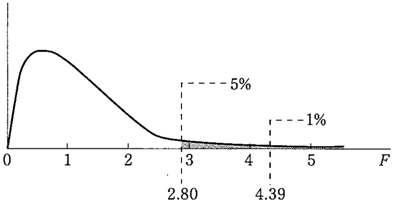
参考文献

1．Statistics	taro Yamane	3ed. Harper Row		1973
2．Elementary statistics	P.G. Hoel	4ed. John Wiley Sons, Inc.		1975
3．統計学入門	アイリーン・マグネロ著			
	神永正博監修	井口耕二訳	講談社	2010
4．統計学入門	沖津　直著	八千代出版		1998

（本学経営学部教授）

付　表

F　分　布　表



例
自由度が$\phi_1 = 9$、$\phi_2 = 12$のとき：$P\ (F > 2.80) = 0.05$
$P\ (F > 4.39) = 0.01$

５％（上の数値）と１％（下の数値）

ϕ_2	ϕ_1 自由度 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	ϕ_2
1	161 4,052	200 4,999	216 5,403	225 5,625	230 5,764	234 5,859	237 5,928	239 5,981	241 6,022	242 6,056	243 6,082	244 6,106	245 6,142	246 6,169	248 6,208	249 6,234	250 6,258	251 6,286	252 6,302	253 6,323	253 6,334	254 6,352	254 6,361	254 6,366	1
2	18.51 98.49	19.00 99.00	19.16 99.17	19.25 99.25	19.30 99.30	19.33 99.33	19.36 99.34	19.37 99.36	19.38 99.38	19.39 99.40	19.40 99.41	19.41 99.42	19.42 99.43	19.43 99.44	19.44 99.45	19.45 99.46	19.46 99.47	19.47 99.48	19.47 99.48	19.48 99.49	19.49 99.49	19.49 99.49	19.50 99.50	19.50 99.50	2
3	10.13 34.12	9.55 30.82	9.28 29.46	9.12 28.71	9.01 28.24	8.94 27.91	8.88 27.67	8.84 27.49	8.81 27.34	8.78 27.23	8.76 27.13	8.74 27.05	8.71 26.92	8.69 26.83	8.66 26.69	8.64 26.60	8.62 26.50	8.60 26.41	8.58 26.35	8.57 26.27	8.56 26.23	8.54 26.18	8.54 26.14	8.53 26.12	3
4	7.71 21.20	6.94 18.00	6.59 16.69	6.39 15.98	6.26 15.52	6.16 15.21	6.09 14.98	6.04 14.80	6.00 14.66	5.96 14.54	5.93 14.45	5.91 14.37	5.87 14.24	5.84 14.15	5.80 14.02	5.77 13.93	5.74 13.83	5.71 13.74	5.70 13.69	5.68 13.61	5.66 13.57	5.65 13.52	5.64 13.48	5.63 13.46	4
5	6.61 16.26	5.79 13.27	5.41 12.06	5.19 11.39	5.05 10.97	4.95 10.67	4.88 10.45	4.82 10.27	4.78 10.15	4.74 10.05	4.70 9.96	4.68 9.89	4.64 9.77	4.60 9.68	4.56 9.55	4.53 9.47	4.50 9.38	4.46 9.29	4.44 9.24	4.42 9.17	4.40 9.13	4.38 9.07	4.37 9.04	4.36 9.02	5
6	5.99 13.74	5.14 10.92	4.76 9.78	4.53 9.15	4.39 8.75	4.28 8.47	4.21 8.26	4.15 8.10	4.10 7.98	4.06 7.87	4.03 7.79	4.00 7.72	3.96 7.60	3.92 7.52	3.87 7.39	3.84 7.31	3.81 7.23	3.77 7.14	3.75 7.09	3.72 7.02	3.71 6.99	3.69 6.94	3.68 6.90	3.67 6.88	6
7	5.59 12.25	4.74 9.55	4.35 8.45	4.12 7.85	3.97 7.46	3.87 7.19	3.79 7.00	3.73 6.84	3.68 6.71	3.63 6.62	3.60 6.54	3.57 6.47	3.52 6.35	3.49 6.27	3.44 6.15	3.41 6.07	3.38 5.98	3.34 5.90	3.32 5.85	3.29 5.78	3.28 5.75	3.25 5.70	3.24 5.67	3.23 5.65	7
8	5.32 11.26	4.46 8.65	4.07 7.59	3.84 7.01	3.69 6.63	3.58 6.37	3.50 6.19	3.44 6.03	3.39 5.91	3.34 5.82	3.31 5.74	3.28 5.67	3.23 5.56	3.20 5.48	3.15 3.36	3.12 538	3.08 5.20	3.05 5.11	3.03 5.06	3.00 5.00	2.98 4.96	2.96 4.91	2.94 4.88	2.93 4.66	8
9	5.12 10.56	4.26 8.02	3.86 6.99	3.63 6.42	3.48 6.06	3.37 5.80	3.29 5.62	3.23 5.47	3.18 5.35	3.13 5.26	3.10 5.18	3.07 5.11	3.02 5.00	2.98 4.92	2.93 4.80	2.90 4.73	2.86 4.64	2.82 4.56	2.80 4.51	2.77 4.45	2.76 4.41	2.73 4.36	2.72 4.33	2.71 4.31	9
10	4.96 10.04	4.10 7.56	3.71 6.55	3.48 5.99	3.33 5.64	3.22 5.39	3.14 5.21	3.07 5.06	3.02 4.95	2.97 4.85	2.94 4.78	2.91 4.71	2.86 4.60	2.82 4.52	2.77 4.41	2.74 4.33	2.70 4.25	2.67 4.17	2.64 4.12	2.61 4.05	2.59 4.01	2.56 3.96	2.55 3.93	2.54 3.91	10
11	4.84 9.65	3.98 7.20	3.59 6.22	3.36 5.67	3.20 5.32	3.09 5.07	3.01 4.88	2.95 4.74	2.90 4.63	2.86 4.54	2.82 4.46	2.79 4.40	2.74 4.29	2.70 4.21	2.65 4.10	2.61 4.02	2.57 3.94	2.53 3.86	2.50 3.80	2.47 3.74	2.45 3.70	2.42 3.66	2.41 3.62	2.40 3.60	11

5％（上の数値）と1％（下の数値）

ϕ_2	ϕ_1 自由度 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞	ϕ_2
12	4.75 9.33	3.88 6.93	3.49 5.95	3.26 5.41	3.11 5.06	3.00 4.82	2.92 4.65	2.85 4.50	2.80 4.39	2.76 4.30	2.72 4.22	2.69 4.16	2.64 4.05	2.60 3.98	2.54 3.86	2.50 3.78	2.46 3.70	2.42 3.61	2.40 3.56	2.36 3.49	2.35 3.46	2.32 3.41	2.31 3.38	2.30 3.36	12
13	4.67 9.07	3.80 6.70	3.41 5.74	3.18 5.20	3.02 4.86	2.92 4.62	2.84 4.44	2.77 4.30	2.72 4.19	2.67 4.10	2.63 4.02	2.60 3.96	2.55 3.85	2.51 3.78	2.46 3.67	2.42 3.59	2.38 3.51	2.34 3.42	2.32 3.37	2.28 3.30	2.26 3.27	2.24 3.21	2.22 3.18	2.21 3.16	13
14	4.60 8.86	3.74 6.51	3.34 5.56	3.11 5.03	2.96 4.69	2.85 4.46	2.77 4.28	2.70 4.14	2.65 4.03	2.60 3.94	2.56 3.86	2.53 3.80	2.48 3.70	2.44 3.62	2.39 3.51	2.35 3.43	2.31 3.34	2.27 3.26	2.24 3.21	2.21 3.14	2.19 3.11	2.16 3.06	2.14 3.02	2.13 3.00	14
15	4.54 8.68	3.68 6.36	3.29 5.42	3.06 4.89	2.90 4.56	2.79 4.32	2.70 4.14	2.64 4.00	2.59 3.89	2.55 3.80	2.51 3.73	2.48 3.67	2.43 3.56	2.39 3.48	2.33 3.36	2.29 3.29	2.25 3.20	2.21 3.12	2.18 3.07	2.15 3.00	2.12 2.97	2.10 2.92	2.08 2.89	2.07 2.87	15
16	4.49 8.53	3.63 6.23	3.24 5.29	3.01 4.77	2.85 4.44	2.74 4.20	2.66 4.03	2.59 3.89	2.54 3.78	2.49 3.69	2.45 3.61	2.42 3.55	2.37 3.45	2.33 3.37	2.28 3.25	2.24 3.18	2.20 3.10	2.16 3.01	2.13 2.96	2.09 2.89	2.07 2.86	2.04 2.80	2.02 2.77	2.01 2.75	16
17	4.45 8.40	3.59 6.11	3.20 5.18	2.96 4.67	2.81 4.34	2.70 4.10	2.62 3.93	2.55 3.79	2.50 3.68	2.45 3.59	2.41 3.52	2.38 3.45	2.33 3.35	2.29 3.27	2.23 3.16	2.19 3.08	2.15 3.00	2.11 2.92	2.08 2.86	2.04 2.79	2.02 2.76	1.99 2.70	1.97 2.67	1.96 2.65	17
18	4.41 8.28	3.55 6.01	3.16 5.09	2.93 4.58	2.77 4.25	2.66 4.01	2.58 3.85	2.51 3.71	2.46 3.60	2.41 3.51	2.37 3.44	2.34 3.37	2.29 3.27	2.25 3.19	2.19 3.07	2.15 3.00	2.11 2.91	2.07 2.83	2.04 2.78	2.00 2.71	1.98 2.68	1.95 2.62	1.93 2.59	1.92 2.57	18
19	4.38 8.18	3.52 5.93	3.13 5.01	2.90 4.50	2.74 4.17	2.63 3.94	2.55 3.77	2.48 3.63	2.43 3.52	2.38 3.43	2.34 3.36	2.31 3.30	2.26 3.19	2.21 3.12	2.15 3.00	2.11 2.92	2.07 2.84	2.02 2.76	2.00 2.70	1.96 2.63	1.94 2.60	1.91 2.54	1.90 2.51	1.88 2.49	19
20	4.35 8.10	3.49 5.85	3.10 4.94	2.87 4.43	2.71 4.10	2.60 3.87	2.52 3.71	2.45 3.56	2.40 3.45	2.35 3.37	2.31 3.30	2.28 3.23	2.23 3.13	2.18 3.05	2.12 2.94	2.08 2.86	2.04 2.77	1.99 2.69	1.96 2.63	1.92 2.56	1.90 2.53	1.87 2.47	1.85 2.44	1.84 2.42	20
21	4.32 8.02	3.47 5.78	3.07 4.87	2.84 4.37	2.68 4.04	2.57 3.81	2.49 3.65	2.42 3.51	2.37 3.40	2.32 3.31	2.28 3.24	2.25 3.17	2.20 3.07	2.15 2.99	2.09 2.88	2.05 2.80	2.00 2.72	1.96 2.63	1.93 2.58	1.89 2.51	1.87 2.47	1.84 2.42	1.82 2.38	1.81 2.36	21
22	4.30 7.94	3.44 5.72	3.05 4.82	2.82 4.31	2.66 3.99	2.55 3.76	2.47 3.59	2.40 3.45	2.35 3.35	2.30 3.26	2.26 3.18	2.23 3.12	2.18 3.02	2.13 2.94	2.07 2.83	2.03 2.75	1.98 2.67	1.93 2.58	1.91 2.53	1.87 2.46	1.84 2.42	1.81 2.37	1.80 2.33	1.78 2.31	22
23	4.28 7.88	3.42 5.66	3.03 4.76	2.80 4.26	2.64 3.94	2.53 3.71	2.45 3.54	2.38 3.41	2.32 3.30	2.28 3.21	2.24 3.14	2.20 3.07	2.14 2.97	2.10 2.89	2.04 2.78	2.00 2.70	1.96 2.62	1.91 2.53	1.88 2.48	1.84 2.41	1.82 2.37	1.79 2.32	1.77 2.28	1.76 2.26	23
24	4.26 7.82	3.40 5.61	3.01 4.72	2.78 4.22	2.62 3.90	2.51 3.67	2.43 3.50	2.36 3.36	2.30 3.25	2.26 3.17	2.22 3.09	2.18 3.03	2.13 2.93	2.09 2.85	2.02 2.74	1.98 2.66	1.94 2.58	1.89 2.49	1.86 2.44	1.82 2.36	1.80 2.33	1.76 2.27	1.74 2.23	1.73 2.21	24
25	4.24 7.77	3.38 5.57	2.99 4.68	2.76 4.18	2.60 3.86	2.49 3.63	2.41 3.46	2.34 3.32	2.28 3.21	2.24 3.13	2.20 3.05	2.16 2.99	2.11 2.89	2.06 2.81	2.00 2.70	1.96 2.62	1.92 2.54	1.87 2.45	1.84 2.40	1.80 2.32	1.77 2.29	1.74 2.23	1.72 2.19	1.71 2.17	25
26	4.22 7.72	3.37 5.53	2.98 4.64	2.74 4.14	2.59 3.82	2.47 3.59	2.39 3.42	2.32 3.29	2.27 3.17	2.22 3.09	2.18 3.02	2.15 2.96	2.10 2.86	2.05 2.77	1.99 2.66	1.95 2.58	1.90 2.50	1.85 2.41	1.82 2.36	1.78 2.28	1.76 2.25	1.72 2.19	1.70 2.15	1.69 2.13	26