

小数倍の意味について

On multiplication by decimal numbers

後藤達生

1. はじめに

算数で乗法が導入されるのは第2学年で、その意味は同数累加の簡潔な表現とされる。同じ数を繰り返し加えるのは面倒だから、かけ算を使いましょうということできわめて明快である。この考えは、第4学年で学ぶ(小数) \times (整数)にも自然に適用できる。例えば、 2.3×80 の意味は2.3を80回加えたものとするのである。

ところが(整数) \times (小数)となると事情は一変する。 80×2.3 は80を2.3回加えたものとすることはできないからである。「整数倍」から「小数倍」への意味拡張をどのように捉え、どのように指導するかという課題は戦前から算数教育に携わるものの関心をよび、今日に至ってもなお様々な角度から論ぜられている。いまだに議論が絶えないのは、これといった「決定版」がないことの証拠である。この小論では、「小数倍の意味」をどのように捉え、どのように指導するのか、筆者なりの考えをまとめてみます。

2. 近年の指導

まず現行の学習指導要領をもとにして、本論に関係する「教材の関連」を整理しておく。

第2学年	第3学年	第4学年	第5学年
乗法の意味	2, 3位数の乗法	小数×整数	整数×小数
	小数, 分数の導入		小数×小数

近年「小数倍の意味」を指導するとき、通常は「1当たり量の小数倍」に帰着する次のような問題を子どもたちに提示することから始まる。

(Q) 「1m 80円のリボンを2.3m 買ったときの代金を求めよう」

さらに、テープ図や線分図を用いながら

(I) $(1\text{mの値段}) \times (\text{長さ}) = (\text{代金})$ により立式を考える

(II) 計算の仕方を考える

と進む。長さが整数のとき(I)が成り立つことを根拠に 80×2.3 と立式する。「形式不易の原理」とか「数量関係を表している文脈が同じときには、整数の場合成り立つ式の形は、小数の場合にもそのまま使えるようにする」([1, p.143])などを拠り所にするのだが、何とも頼りない。(II)では

(II-1) 0.1mの値段を23倍すると考えて $80 \div 10 \times 23$ で計算する

(II-2) 23mの値段の $1/10$ と考えて $80 \times 23 \div 10$ で計算する

(II-3) 2mと0.3mの値段を求め、それらを加える

などの方法が取り上げられる。

この流れに沿って「小数倍の意味」指導をするのだが、これで子どもたちが「80に2.3をかける」ことの意味を理解できるとは、どう考えても思えない。上述したように、多くの文献が立式の根拠について様々な角度から論じているが、典型的なものは上述した言葉の式に拠るもの以外に、

(I-1) 80を1とみるとき2.3に当たる大きさが 80×2.3

(I-2) 長さが2.3倍になったから、値段も2.3倍になる

などがある。(II-1)は新指導要領でも算数的活動として取り上げられて

いるもので、考え方としては正しいが「小数倍の意味」導入時にこれを持ち出すのは到底無理だ ([1], p.146). (II-2) に至っては、小数倍の意味が定まっていない段階で2.3倍という表現を用いる矛盾を孕んでいて筆者には受け入れ難い.

3. 「小数倍の意味」指導についての試案

小数倍の意味を指導するとき、根本となる考え方を以下に述べる. 導入時の授業展開は、2で取り上げた問題(Q)を少し変える:

(Q) 「1 m 80円のリボンを0.7m買った時のときの代金を求めよう」

立式はせず (I) はとばして、(II) の計算の仕方を課題として与える.

(II-1) 0.1mの値段を考えて $80 \div 10 \times 7$ で計算する

(II-2) 7 mの値段を考えて $80 \times 7 \div 10$ で計算する

の方法を取り上げ、どちらでも同じ56円となることを確かめる. さらに

(III) $80 \div 10 \times 7$ を 80×0.7 と書くと約束する

(IV) 言葉の式 (1 mの値段) \times (長さ) = (代金) は長さが0.7であっても成り立つことを確かめる

という展開になる. 重要なのは(III)で、これで小数の倍の意味が明確になる. つまり

$$\square \times 0.7 = \square \div 10 \times 7$$

あるいは

$$\square \text{に} 0.7 \text{をかける} \Leftrightarrow \square \text{を} 10 \text{等分したときの} 7 \text{個分}$$

ということになる. 0.7が0.1の7個分という捉え方は第4学年の指導内容であり、1を10等分して7個集めると0.7になることは既習事項である.

2.3倍の意味も同様に、 $\div 10 \times 2.3$ と定めるのである. \square に小数が入るのは第5学年の内容だが、式の意味は全く変わらない.

4. 分数倍について

分数倍の意味の導入の困難さは小数倍のそれと変わらない。小数を分数の特別なものと考えれば、問題は同一とさえいえる。蒔苗直道が論説[3]で述べているように、分数の乗法の意味指導は、従来から算数指導の課題として取り上げられてきた内容であり、近年においてもその問題点が指摘されている。

[3]では昭和22年(1947年)に発行された国定教科書『算数』^{註)}における分数の乗法の意味指導に焦点をあてて詳しく論じている。

分数倍の導入は第6学年の『算数』で取り上げられ、次のような文で始まる。少し長くなるが、なかなか面白いので原文のまま紹介する。

一 旅行

茂君たちは、旅行に出かけた。景色を見てスケッチをしている者、線路のそばに立っている柱を見て、速さをはかっている者などがいる。

茂「先生、どれぐらい乗っていればよいのですか」

先生「もうあと二時間四十分ぐらいです」

茂「まだ、ずいぶんあるんですね」

先生「一時間に40kmの割合で走るとして、ここからどれくらいあるかを計算してごらん」

茂君たちは計算し始めた。どんな計算の仕方があるだろう。私たちも考えてみよう。茂君たちは、自分たちのした計算を説明し合っている。まず、勇君が始めた。

$$40 \times 2 = 80 \text{ (km)}$$

$$40 \div 60 \times 40 = \frac{40 \times 40}{60} = 26.6 \dots \text{ (km)}$$

$$80 + 27 = 107 \text{ (km)}$$

次に、正君が説明した.

$$40 \times 2 = 80 \text{ (km)}$$

$$40 \div 3 \times 2 = \frac{40 \times 2}{3} = 26.6 \dots \text{ (km)}$$

$$80 + 27 = 107 \text{ (km)}$$

続いて、実君が説明した.

$$40 \times 2 = 80 \text{ (km)}$$

$$40 \times \frac{2}{3} = \frac{80}{3} = 26.6 \dots \text{ (km)}$$

$$80 + 27 = 107 \text{ (km)}$$

みんなは実君の計算の仕方が分からないので、そのわけを聞くことになった.

実「40分は1時間の $\frac{2}{3}$ です. だから、40分間には、1時間に走る距離

40kmの $\frac{2}{3}$ だけ進む. かける数が1, 2であると、その結果は1と2

の割合になる. また、かける数が $1, \frac{2}{3}$ であると、その結果は1と $\frac{2}{3}$

の割合になる. したがって、 $\frac{2}{3}$ をかけた結果は、1をかけた結果の $\frac{2}{3}$

になる. いいかえると、かけられる数の $\frac{2}{3}$ になる. だから $40 \times \frac{2}{3}$ は

$40 \div 3 \times 2$ となる。」

この展開で実君の説明が要点になるが、何度読み返しても筆者には理解できない. これに続いて次のようなやり取りがある.

勇「速さに時間をかけて、距離を計算することができる。速さと時間を表す数が、それぞれ40と $\frac{2}{3}$ だから $40 \times \frac{2}{3}$ としてよいわけだね。」

実「速さに時間をかけて、距離が求められることは、時間を表す数が整数である場合には、その理由を説明することができる。しかし時間が分数である場合にも、その公式を用いてよいかどうか分からない。まず、分数をかける計算の仕方をきめて、はじめて公式を用いてよいことが分かるのだ。」

むやみに言葉の式を使うわけにはいかないとする実君の考えが記述されている。近年の教科書の扱いとは逆である。『算数』の執筆者である和田義信はほかの著作において

$$16 \times \frac{3}{8} = 16 \div 8 \times 3$$

であることは、乗法の結合法則を有理数に拡張することで説明できる、と述べているそうだ [3, p.6]. 「分数倍の意味」という怪物が「結合法則」という別の怪物に化けただけという気がする。遠山啓は「かけ算の拡大解釈」について

$$5 \times \frac{3}{4} \text{ は } 5 \div 4 \times 3$$

のことだと約束すれば (速度) × (時間) = (距離) の公式が分数の世界でも通用することになる、と述べている ([2, p.38]). 筆者も、分数倍の意味を指導するとき、これよりほかはないと信ずる。近年の指導は、多くはペンキ塗りの問題を取り上げ、言葉の式に分数をあてはめることで、分数倍の意味指導を行っている。子どもたちに演算決定の能力が定着しない理由の一つはこの辺にあると考える。

5. 終わりに

日本数学教育学会編集部による座談会の記録[4]においても、小数や分数の乗除の意味理解、とくに文章題を読み正しく立式する力について、長年の教育実践にもかかわらずその効果がみられないとの指摘があります。演算決定の重要性が第一に確認されているが、これに対する教育現場の認識は低く、現状では言葉の式へのあてはめによる立式という形式的な指導と、計算習熟への偏重がみられるという実態が指摘されている。算数を研究する一部の先生を除けば多くの先生にとって、自分のクラスの計算の正答率を上げることが主眼で、演算決定能力の育成は先生方の意識から外れているというのである。これは近年の教科書の書き方にも大きな責任がある。言葉の式に拠る立式が否応なしに誘導されているからである。

算数では問題が与えられたとき、通常はまず立式から考える。次に計算の仕方を考える。しかしながら、小数倍の意味を導入する授業で上述した問題(Q)もしくは(Q')を示したとき、子どもたちに 80×2.3 もしくは 80×0.7 と立式させるのは不可能である。百万言を費やしてもできない。なぜなら、 \times (小数)の意味を習ったことがないからである。既習事項をどう組み合わせようが \times (小数)の形の式を立てようがないのである。3で述べたように展開するのが正しいというのが筆者の考えであるが、いかがでしょうか。

注) 昭和22年戦後の新教育制度発足に伴い、新制小学校において新しい学校数学が始まる。戦後初の学習指導要領(試案)が発行され、戦前から使われていた国定教科書も一新される。算数においては、低学年向けの『さんすう』、中高学年向けの『算数』が発行される。昭和24年からは教科書検定制度が実施されるため、この教科書シリーズが国定教科書最後のものである。

後 藤 達 生

参考・引用文献

- [1] 「小学校学習指導要領解説 算数編」 文部科学省 平成20年8月
- [2] 遠山啓「数学入門(上)」 岩波新書
- [3] 蒔苗直道「分数の乗法の意味指導における算数的活動 —昭和22年の国定教科書『算数』に焦点をあてて—」日本数学教育学会誌, 2010年, 92(10), pp.2-11.
- [4] 日本数学教育学会算数教育編集部編「乗法・除法の意味(演算決定)の指導のあり方についての今後の研究に向けての提言」日本数学教育学会誌2005年87(10) pp.12-31.